ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта -
филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»
(УУКЖТ ИрГУПС)

Н.В.Дубович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению контрольной работы

дисциплины ЕН.01 Математика

для специальности

23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог
(вагоны)

Базовая подготовка

среднего профессионального образования

Заочная форма обучения на базе среднего общего образования

Улан-Удэ - 2020

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Д-796

Дубович Н.В.

Д-796 **ЕН.01 Математика**: Методические указания по выполнению контрольной работы для обучающихся среднего профессионального образования заочной формы обучения специальности 23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог (вагоны) / Н.В.Дубович; Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта ИрГУПС. - Улан-Удэ: Сектор информационного обеспечения учебного процесса УУКЖТ ИрГУПС, 2020. – 42с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплине «Математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Рассмотрено на заседании ЦМК протокол №6 от 17.06.20 и одобрено на заседании Методического совета колледжа протокол №5 от 17.06.20

СОДЕРЖАНИЕ

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплинам «Математика» и «Прикладная математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту заочной формы обучения самостоятельно справиться с выполнением контрольной работы, научиться решать задачи по всем разделам курса по данным дисциплинам.

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради школьного формата.
2. На обложке тетради наклеивается информационный лист с указанием: шифра, специальности, фамилии, имени, отчества студента, предмет и номер работы.
3. Работа должна быть выполнена пастой одного цвета, аккуратно и разборчиво.
4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.
5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием.
6. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью в контрольную тетрадь.
7. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения. Перечислим важнейшие из этих требований:

- необходимо соблюдать абзацы, всякую новую мысль следует начинать с красной строки;
- важные формулы, равенства, определения нужно выделять в отдельные строки. Чтобы сделать их более обозримыми;
- при описании решения задачи краткая запись условия отделяется от решения и в конце решения ставится ответ;
- серьезное внимание следует уделять правильному написанию сокращенных единиц величин;

- необходимо правильно употреблять математические символы.

8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

9. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

10. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались. Проставить дату выполнения работы и подпись.

11. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то студент должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.

12. Контрольная работа должна быть выполнена в срок (в соответствии с учебным планом).

13. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается студенту без оценки.

14. Студент, не имеющий зачета по контрольной работе, к экзамену не допускается.

15. Во время экзамена зачтенные контрольные работы представляются преподавателю вместе с данными методическими указаниями.

16. Контрольная работа имеет 4 варианта. Вариант работы выбирается преподавателем.

Теоретический материал

Раздел 1. Линейная алгебра

Комплексные числа

1. Комплексные числа и действия над ними.

Решение многих задач сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому исследование алгебраических уравнений является одним из важнейших вопросов математики.

Действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое алгебраическое уравнение. Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел до множества, такого, чтобы в этом множестве уравнение вида $x^2 + a^2 = 0$ имели решения.

Корень уравнения $x^2 + 1 = 0$ или $x^2 = -1$ называется *мнимой* *единицей* и обозначается *i*.

Число вида $z = a + bi$, где а и в – любые действительные числа, а i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется ***комплексным числом***.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа *вида* $z = a + bi$, а число bi – *мнимой частью.*

Два комплексных числа $z= a_1+ i\, b_1$ и $z= a_2+ i\, b_2$ считаются **равными**, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 i = b_2 i$

Два комплексных числа называют *сопряженными,* если они отличаются друг от друга только знаком перед мнимой частью. Сопряженные комплексные числа обозначают: z и $\bar{z}$. Например, $z_1 = 1+ 2i$ и $\bar{z}_1 = 1- 2i$;

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Пусть даны комплексные числа: $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. 1. Сложение $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

2. Вычитание $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

3. Умножение

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

4. Возведение комплексного числа в степень производится по формулам возведения двучлена в соответствующую степень, но при этом надо учитывать, что $i^1 = i$, $i^{4n+1} = i^1$,
$i^2 = -1$, $i^{4n+2} = i^2 = -1$,
$i^3 = -i$, $i^{4n+3} = i^2 = -i$,
$i^4 = 1$, $i^{4n} = 1$

5. При делении двух комплексных чисел в алгебраической форме, необходимо умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример 1.

1. $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = (2 + 5) + (3 - 7)i = 7 - 4i$;

2. $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = (2 - 5) + (3 - (-7))i = -3 + 10i$;

3.

$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i$;

4. $(2 + 3i)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$ **;**

$(3 + 5i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9i^2 + 27i^3$**,** так как $i^2 = -1$, $i^3 = -i$,

то получим $(3 + 5i)^3 = 125 + 225i - 135 - 27i = -10 + 198\,i$

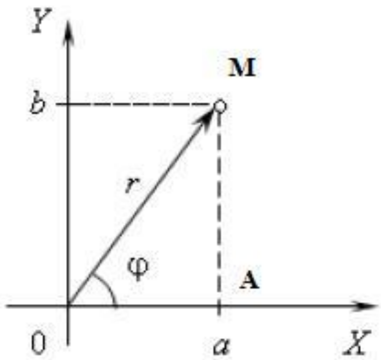
5. $\dfrac{2 + 3i}{5 - 7i} = \dfrac{(2 + 3i) \cdot (5 + 7i)}{(5 - 7i) \cdot (5 + 7i)} = \dfrac{10 + 14i + 15i + 21i^2}{5^2 - (7i)^2} = \dfrac{10 + 29i - 21}{25 - 49i^2} = \dfrac{-11 + 29i}{25 + 49} = \dfrac{-11 + 29i}{74} =$

$-\dfrac{11}{74} + \dfrac{29}{74}i$.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Любое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить на комплексной плоскости точкой Z с координатами *(a; b)* .*Модулем комплексного числа* называется длина вектора *OM*,

изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Пусть дано комплексное число $z = a + bi$**,** выразим действительные числа *a и b* через модуль r и аргумент φ числа z следующим образом: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Таким образом, комплексное число можно записать в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r-модуль комплексного числа, а φ – один из его аргументов. Представление комплексного числа в указанном виде называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Итак, существует три формы записи комплексного числа: $z = a + bi$ - алгебраическая форма; $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма;

$z = re^{i\varphi}$ - показательная форма.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной:

1. Найти модуль r комплексного числа находим по формуле: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Изобразить комплексное число на комплексной плоскости и определить четверть, в которой находится точка Z.

3. В зависимости от четверти, найти аргумент φ комплексного числа

4. Записать число в тригонометрической форме, подставив все найденные значения в формулу: $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, в показательной - $z = re^{i\varphi}$.

Пример . Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число z = 3 + $\sqrt{3}$ i.

Решение:

1) находим модуль комплексного числа:

$$a = 3;\ b = \sqrt{3}$$

$$|z| = r = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{3}.$$

2) находим главное значение аргумента комплексного числа z: так как вектор, изображающий число z лежит в I четверти и

$$tg(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \text{то}\ \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

3) находим тригонометрическую форму: $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, находим показательную форму: $z = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Свойства определителей и их вычисление

Содержание материала: *определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.*

1.*Матрицей* называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента a_{ij}, первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j - номер столбца.

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется *прямоугольной*. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Если число строк равно числу столбцов (m = n), то матрица называется *квадратной*. Например, квадратными являются матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, в последнем примере порядок матрицы А равен 2, а порядок матрицы В равен 3.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны. Так, матрицы

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \dots \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \dots \end{pmatrix}$ равны, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$,

$a_{13} = b_{13}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{23}$.

Равные матрицы обязательно либо обе они прямоугольные типа того же порядка n. имеют одно и то же строение: $m \times n$,

Линейные операции над матрицами

Суммой матриц А и В называют такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В. Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа $m \times n$, или квадратные порядка n.

Пусть А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Тогда сумма матриц С = А+В имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Сложить матрицы А и В, если:

а) А = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) А = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) Здесь А и В - квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Здесь А и В - прямоугольные матрицы типа 2×3. Складываем их соответствующие элементы: С = А + В = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

в) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как А есть матрица типа 3×2, а В - матрица типа 2×3; можно складывать только прямоугольные матрицы одного типа.

Таким образом, сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяется переместительный закон сложения: A+B=B+A.

Произведением матрицы А на число k называется такая матрица kA, каждый элемент которой равен ka_{ij}, т. е. если A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то кA = $\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример 2. Умножить матрицу A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число k = 3.

Решение: Умножая каждый элемент матрицы A на 3, получим:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, тогда ***произведением*** этих матриц называется матрица C = AB = $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$. Чтобы найти элемент c_{11} первой строки и первого столбца матрицы C, нужно каждый элемент первой строки матрицы A (т. е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (т.е. b_{11} и b_{12}) и полученные произведения сложить; чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы C, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить; аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22} .

Пример 3. Найти произведение матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц, при чем справедливы правила:

1) умножение матрицы А на матрицу В имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, т. е. $AB \neq BA$.

2. Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя переменными x, y, z:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2; \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3. \end{cases}$$

Определителем третьего порядка называется число, вычисляемое по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3$$

Правая часть состоит из алгебраической суммы шести членов, из которых три взяты со знаком «плюс», а три со знаком «минус». Со знаком «плюс» входят произведения элементов, лежащих по *главной диагонали,* а также произведения элементов, лежащих на параллелях к этой диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя, а со знаком «минус» – произведения элементов побочной диагонали, а также произведения элементов, лежащих на параллелях к *побочной диагонали*, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя. Это правило называют ***правилом треугольника***.

Пример 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 10 - 0 + 1 + 24 = 53$.

Алгоритм ршения систем трех уравнений с тремя неизвестными методом Крамера:

1. Вычислить главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

2. Вычислить определитель $\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

3. Вычислить определитель $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};$

4. Вычислить определитель $\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix};$

5. В зависимости от полученных значений определить решение системы исходя из трех возможных случаев:

- если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$;
- если $\Delta = 0$, а Δx, Δy, Δz одновременно не равны нулю (т.е. $\Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 z > 0$), то система не имеет решений;
- если $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, , то система имеет множество решений.

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14, \\ 3x - y + 2x = 5, \end{cases}$

$$x + 2y - z = 7.$$

Решение.

Вычислим главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16$.

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Вычислим теперь Δx , Δy , Δz :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 32\ ;\quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 48\ ;\quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 16\ .$$

Подставив найденные определители в формулы Крамера, получим:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2\ ; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3\ ; z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1\ .$$

Ответ: (2; 3; 1).

Раздел 2. Математический анализ

Дифференциальное и интегральное исчисление

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке. Возьмем из этого промежутка фиксированное значение аргумента x и придадим ему приращение Δx так, чтобы новое значение аргумента $x + \Delta x$ принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции $f(x)$ заменится новым значением $f(x) + \Delta y = f(x+\Delta x)$, т.е.функция получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю называется *производной функции* y = *f(x), т.е*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если функция *f(x) имеет производную в точке x,* то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Производная сложной функции

Сложная функция – это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций, а не какую-то ее особенную сложность. Например, функция y = sin 3x является сложной. Если обозначить 3x = u, то получим sin u, где u – промежуточная функция. В сложную функцию может входить не одна, а несколько промежуточных функций. Например, для функции $y = \cos^2 2x$ промежуточными функциями служат u = cos v и v = 2x..

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\mathbf{y'(x) = y'(u) \cdot u'(x).}$$

Примеры.

1. $\mathbf{y = (x^2 + 3x)^5}$

Решение. Полагая $u = x^2 + 3x$, получим $y = u^5$. По формуле (10) находим $y' = 5(u)^4 (u)' = 5(x^2 + 3x)^4 (x^2 + 3x)' = 5(x^2 + 3x)^4(2x+3)$.

Такая подробная запись производится только в процессе освоения техники дифференцирования. При навыке промежуточные вычисления производятся в уме.

Ответ: $y' = 5(x^2 + 3x)^4(2x+3)$.

2. y = sin 3x

Решение. Полагая u =3x , получим y = sin u. По формуле (13)

$y' = \cos u\,(u)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$.

Ответ: $y' = 3\cos 3x$.

3. y = ln cosx

Решение. Полагая cos x = u; получим y = ln u; По формуле (8)

$y' = (\ln u)' \cdot = \frac{1}{u} \cdot u'$

$y' = \frac{1}{\ldots}$ ... $'$ $\frac{\sin x}{\ldots}$

$\cos x$ $\quad\quad\quad\quad$ $\cos x$

Ответ: $y^{|} = -tgx$.

4. $\mathbf{y = 2^{\ln x}}$

Решение. Полагая $\ln x = u$, получим $y = 2^{u}$. По формуле (12). $y^{|} = (2^{u})^{|} \cdot = 2^{u} \ln 2 \cdot u^{|}$

$$y^{|} = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x)^{|} = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x};$$

Неопределенный интеграл

1. Основные формулы интегрирования

Функция F(x) называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна *f(x):*

$F^{/}(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx,\ a \le x \le b.$

Отыскание первообразной функции по заданной ее производной *f(x)* или по дифференциалу *f(x)dx* есть действие, обратное дифференцированию, - интегрирование.

Совокупность первообразных для функции *f(x)* или для дифференциала *f(x)dx* называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $d(F(x) + C) = f(x)dx$.

Здесь *f(x)* подынтегральная функция; *f(x)dx* – подынтегральное выражение; С – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1.Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$\int dF(x) = F(x) + C.$

2.Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$d\int f(x)dx = f(x)dx,\ (\int f(x)dx)^{/} = f(x).$

3.Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

5.Если $\int f(x)dx$=F(x) +C и u = φ (x) – любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов (смотри приложение 5) . Здесь могут представиться следующие случаи:

1)данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2)данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3)данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример.

Найти следующие интегралы:

1. $\int 5dx$; 2. $\int 4(x^2 - x + 3)$dx ; 3. $\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx$; 4. $\int \frac{dx}{x^4}$.

1. На основании свойства 4 постоянный множитель 5 выносим за знак интеграла и, используя формулу (1), получим

$$\int 5dx = 5x + C.$$

2.Используя свойство 3 и 4 и формулу (1) и (2), получим

$$\int 4(x^2 - x + 3)dx = 4\int x^2dx - 4\int xdx + 12\int dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C$$

3.Используя свойство 3 и 4 и формулу (1(и (2), получим

$$\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx = 4\int x^3dx - 15\int x^2dx + 14\int xdx - 3\int dx =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 15\frac{x^3}{3} + 14\frac{x^2}{2} - 3x + C = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + C.$$

4.Используя формулу (2), находим:

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{\;} + C = \frac{x^{-3}}{\;} + C = -\frac{1}{\;} + C.$$

$-4+1$ -3

Способ подстановки

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Этот метод называют также *методом замены переменной.* Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Он заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Естественно возникает вопрос: как правильно выбрать подстановку? Это достигается практикой в интегрировании. Все же можно установить ряд общих правил и некоторые приемы для частных случаев интегрирования.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменой.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Примеры.

1.Найти $\int (2+x)^7\,dx$.

$$\int (2+x)^7\,dx = \int t^7\,dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{(2+x)^8}{8} + C.$$

2 + x = t

(2+x)′dx= dt

dx = dt

Ответ: $\frac{(2+x)^8}{8} + C$

Определенный интеграл

Определение. Если F(x) + C – *первообразная* функция для f(x) , то приращение F(b) –F(a) первообразных функций при изменении аргумента x от x = a до x = b называется *определенным интегралом.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

где a - нижний предел, а b – верхний предел определенного интеграла.

Для вычисления определенного интеграла *применяется формула*

Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Все методы интегрирования, используемые при нахождении неопределенных интегралов, применяются и при вычислении определенных интегралов. Числовое значение определенного интеграла зависит от вида функции, стоящей под знаком интеграла, и от значений верхнего и нижнего пределов и не зависит от обозначения переменной.

1.Вычисление определенных интегралов по готовым формулам:

1. $$\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}.$$

2.

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2 + 2\right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)\right] = 9.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Понятие о дифференциальном уравнении

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x , искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x,y,y^{\prime}) = 0,\ F(x,y,y^{\prime\prime}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значенияхпроизвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Задача, нахождения частного решения , удовлетворяющих начальным условиям, называется задачей Коши.

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$.

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Решить уравнения:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$3dx - y^2 dy + xdx = 0;$$

Чтобы произвести разделение переменных, надо сгруппировать члены с dx и записать полученные функции в разных частях равенства:

$$y^2 dy = (3 + x)\, dx;$$

Получим уравнение с разделяющими переменными, интегрируем:

$\int y^2 dy = \int (3 + x)dx$; $\frac{y^3}{3} = 3x + \frac{x^2}{2} + C$; $\frac{y^3}{3} - 3x - \frac{x^2}{2} = C$;

Общее решение данного уравнения.

Ответ: $\frac{y^3}{3} - 3x - \frac{x^2}{2} = C$;

2. Найти общее решение дифференциального уравнения: $1 + y - xy' = 0$:

Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$, получим $1 + y - x\frac{dy}{dx} = 0$:

Умножим все члены на dx $dx + ydx - x\,dy = 0$;

Сгруппируем члены с dx . $(1 + y)\,dx - x\,dy = 0$;

Запишем полученные функции в разных частях равенства:

$x\,dy = (1 + y)\,dx$; разделив переменные имеем: $\frac{dy}{} = \frac{dx}{}$;

$1+y \qquad x$

Интегрируем обе части полученного уравнения

$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{x}$; ln(1+y) = lnx + lnC; ln(1+y) = ln (xC);

1 + y = x · C ; y = x · C – 1; Общее решен ие уравнения.

Ответ: y = x · C – 1.

3.Найти общее решение уравнения x $(1 + y^2)$dy = ydy.

Разделив переменные, имеем

$$xdx = \frac{ydy}{1+y^2}$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}; \frac{x^2}{} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная С может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований

вместо С мы написали $\frac{1}{2}\ln C$.

Потенцируя последнее равенство, получим

$$x^2 = ln\ (C\ (1 + y^2))$$

Это и есть общее решение данного уравнения.

Ответ: $x^2 = \ln (C (1 + y^2))$

4. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$; y = 4 при x = 0.

Разделив переменные, имеем

$$(y-2)\,dy = (x-1)\,dx\,;$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int (y-2)dy = \int (x-1)dx; \qquad \int ydy - \int 2dy = \int xdx - \int dx;$$

$$\frac{y^2}{2} - 2y = \frac{x^2}{2} - x + C\ ;$$

Это общее решение данного уравнения.

Для нахождения значения произвольной постоянной С подставим значения

$У = 4$: $x = 0$; $\frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 = \frac{0^2}{2} - 0 + C$; $8 - 8 = 0 - 0 + C$; $C = 0$;

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $y^2 - 4y = x^2 - 2x$; $x^2 - y^2 + 4y - 2x = 0$.

Ответ: $x^2 - y^2 + 4y - 2x = 0$.

На основании решенных примеров очевиден алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

-Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.

-Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.

-Разделяют переменные.

-Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.

-Если заданы начальные условия, то находят частное решение. В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

Ряды

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

где числа u_1, u_2, u_3, …,u_n, … называемые *членами ряда*, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется *общим членом ряда*.

Суммы

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

……………………

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ + a_n$$

составленные из первых членов ряда, называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм

$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$. Если последовательность (S_n) сходится , т.е. имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то числовой ряд называется *сходящимся,* а S – суммой ряда. В противном случае ряд называется *расходящимся.*

1.**Необходимый признак сходимости ряда.**

Ряд $\sum\limits_{n\to1}^{n\to\infty} u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремиться к нулю;

$$\sum_{n\to1}^{n\to\infty} u_n = 0 .$$

$n\to\infty$

Если $\sum\limits_{n\to1}^{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n\to1} u_n$ расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

1.Признак сравнения рядов с положительными членами.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

2. Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n\to1}^{n\to\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots (u_n \quad 0)$$

Выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при l<1 и расходится при l>1

Признак Даламбера не дает ответа, если l=1. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Числовой ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ называется *знакопеременным,* если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$называется *знакочередующимся,* если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если члены знакочередующегося рада $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ монотонно убывают по абсолютной величине и общий член u_n стремиться к нулю при $n \to \infty$, то ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ сходится.

Этот признак служит достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд

$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ расходится, то данный ряд называется *условно*

(неабсолютно) сходящимся. Заметим, что из расходимости ряда

$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ в общем случае не следует расходимость ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$.

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного (и знакочередующегося) ряда используются те же признаки, что и для сходимости ряда с положительными членами.

5.Ряд Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье для функции *f(x)* в промежутке изменения аргумента

$-\pi \le x \le \pi$ называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

(1)

Или, короче

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$ **(2)**

—

где $a_0,\ a_1,\ a_2,,\ ...,a_n\ ,\ b_1\ \ ,\ b_2\ \ ,\ ...,\ b_n$ коэффициенты ряда, называемые *коэффициентами Фурье*

Коэффициенты ряда Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Пример.

1. Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} + \dots;$$

Решение.

Находим $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} = 0$. Необходимый признак

сходимости ряда выполняется, но для решения вопроса о сходимости

нужно применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots,$ который сходится, так как q = $\frac{1}{2}$ <1.

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3\cdot 2^2} < \frac{1}{2^2};\frac{1}{5\cdot 2^3}\quad \frac{1}{2^3};\dots;\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n} < \frac{1}{2^n};\dots,$$

т.е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

2. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n} = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots + \frac{2n}{5^n} + \dots;$$

Решение.

2n

Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо n число n+1, получим

$\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$.

Найдем предел отношения (n+1) -го члена к n - му члену при $n \to \infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{5^{n+1}} : \frac{2n}{5^n} = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Раздел 3 Основные численные методы

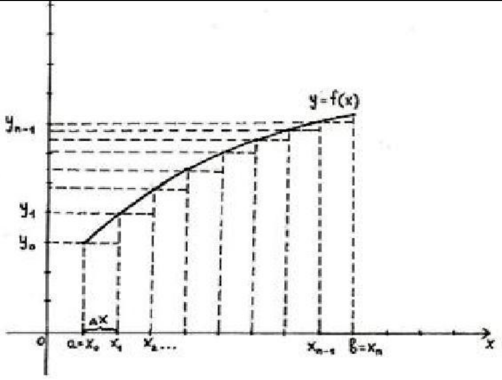
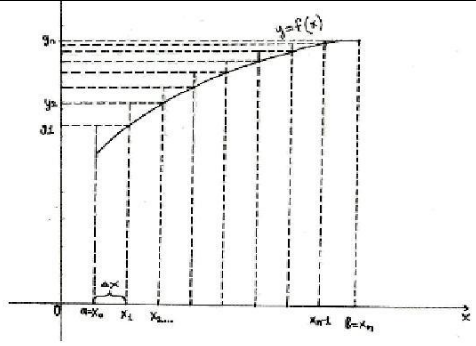
Численное интегрирование

Приближенное вычисление определенных интегралов

Часто приходится вычислять определённые интегралы, для которых невозможно найти первообразную. В этом случае применяют приближённые методы вычисления. Иногда приближённый метод применяют и для “берущихся” интегралов, если вычисление по формуле Ньютона-Лейбница не рационально. Идея приближённого вычисления интеграла заключается в том, что кривая $y = f(x)$ заменяется новой, достаточно “близкой” к ней кривой. В зависимости от выбора новой кривой можно использовать ту или иную приближённую формулу интегрирования. Рассмотрим три приближенных метода: метод прямоугольников, метод трапеций, метод парабол (метод Симпсона).

Метод прямоугольников

Геометрически идея способа вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников состоит в том, что площадь криволинейной трапеции ABCD заменяется суммой площадей прямоугольников, одна сторона которых равна $\frac{b-a}{n}$, а другая - $y = f(x_n)$. Если суммировать площади прямоугольников, которые показывают площадь криволинейной трапеции с недостатком и избытком, то получим формулы:

с недостатком:	*с избытком:*
	
$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$	$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_1 + ... + y_n)$

Значения y_0, y_1,..., y_n находят из равенств $y_\kappa = f(a + k\Delta x)$, $k = 0, 1....., n$. С увеличением n результат становится более точным.

Итак, чтобы найти приближённое значение интеграла $\int_a f(x)dx$ по формуле прямоугольников, необходимо:

- разделить отрезок интегрирования $[a,\ b]$ на n равных частей точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$;
- вычислить значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках деления, т.е. найти $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ y_{n-1} = f(x_{n-1}),$ $y_n = f(x_n)$;
- воспользоваться одной из приближённых формул.

Для того, чтобы найти погрешность вычислений, надо воспользоваться формулами:

$$\Delta = \left| A_{точн} - A_{прибл} \right|$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\left| A_{точн} \right|} \cdot 100\%$$

55

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_0 \cos x dx$.

Решение: Разделим промежуток интегрирования на 5 частей. Тогда $n = 5$; $b - a = \frac{\pi}{4}$; $\Delta x = \frac{b-a}{5} = \frac{\pi}{20} \approx 0{,}1571$. Найдем значения подынтегральной функции (с точностью до 4-х знаков после запятой):

$$y_0 = \cos 0^0 = 1{,}0000\ ;$$

$$y_1 = \cos\left(\frac{\pi}{20}\right) = \cos 9^0 = 0{,}9877\ ; \quad y_2 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos 18^0 = 0{,}9511;$$

$$y_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{20}\right) = \cos 27^0 = 0{,}8910\ ; \quad y_4 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^0 = 0{,}8090\ ;$$

$$y_5 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}7071\ .$$

Тогда, по формуле прямоугольников (с недостатком):

$$A_{прибл} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \approx 0{,}1571\cdot (0{,}9877 + 0{,}9511 + 0{,}8910 + 0{,}8090 + 0{,}7071) = 0{,}7282$$

С другой стороны, по формуле Ньютона Лейбница:

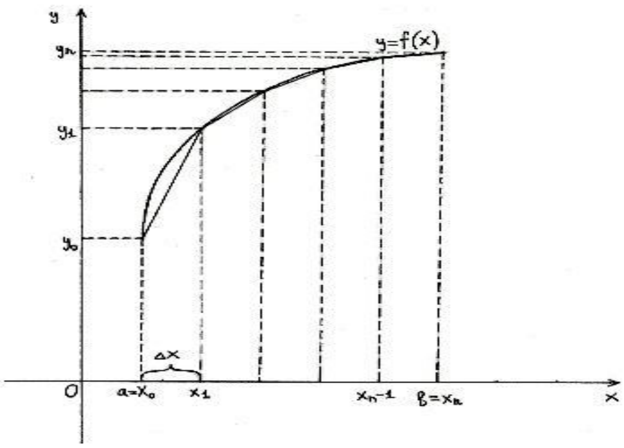
$$A_{точн} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Найдем относительную погрешность вычисления по формуле прямоугольников:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A_{точн}|}\cdot 100\% = \frac{\left|0{,}6827 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot 100\% = 3{,}45\%$$

Метод трапеций

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций:
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\right)$$



Пример 2. Вычислить по формуле трапеций $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$, при $n = 5$.

Решение: Промежуток интегрирования разделен на 5 частей, тогда

$\Delta x = \dfrac{b-a}{5} = 1$ и $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$. Найдем значения подынтегральной функции (с точностью до 3-х знаков после запятой): $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = 0{,}5$; $y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+4}} \approx 0{,}447$; $y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2+4}} \approx 0{,}409$; $y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3+4}} \approx 0{,}377$; $y_4 = \dfrac{1}{\sqrt{4+4}} \approx 0{,}353$; $y_5 = \dfrac{1}{\sqrt{5+4}} = \dfrac{1}{3}$. Тогда по формуле трапеций, получим:

$$A_{прибл} = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 1\cdot(0{,}416 + 0{,}447 + 0{,}409 + 0{,}377 + 0{,}353) = 2{,}002$$

С другой стороны, по формуле Ньютона Лейбница:

$$A_{точн} = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} = (2\sqrt{x+4})\Big|_0^5 = 6-4 = 2$$

Найдем относительную погрешность вычисления по формуле трапеций:

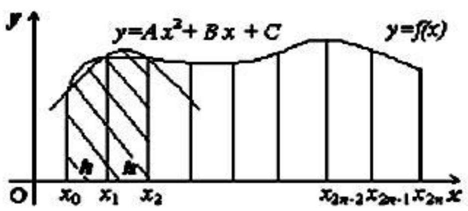
$$\delta = \frac{\Delta}{|A_{точн}|}\cdot 100\% = \frac{|2-2{,}002|}{2}\cdot 100\% = 0{,}2\% .$$

Метод Симпсона

Суть метода заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающие элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси Оу. Тогда криволинейную трапецию заменяют не суммой площадей прямолинейных фигур, как в предыдущих методах, а суммой площадей криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})\right)$$

где n - четное число.



Пример 3. Вычислить по формуле Симпсона $\int_1^4 x^2\,dx$.

Решение: Разделим промежуток интегрирования на 10 равных частей. Тогда $\frac{b-a}{3n}=\frac{3}{30}=0{,}1$. Подставляя в подынтегральную функцию $y=x^2$ значения аргумента: $x_0=1$; $x_1=1{,}3$; $x_2=1{,}6$, …. , $x_{10}=4$, найдем соответствующие значения ординат $y_0=1$, $y_1=1{,}69$; $y_2=2{,}56$; $y_3=3{,}61$; $y_4=4{,}84$; $y_5=6{,}25$; $y_6=7{,}84$; $y_7=9{,}61$; $y_8=11{,}56$; $y_9=13{,}69$; $y_{10}=16$. Тогда, по формуле Симпсона получим:

$$A_{прибл}=\int_1^4 x^2\,dx\approx 0{,}1\cdot((1+16)+2(2{,}56+4{,}84+7{,}84+11{,}56)+$$

$$+4(1{,}69+3{,}61+6{,}25+9{,}61+13{,}69))=21.$$

Вычисление по формуле Ньютона Лейбница дает:

$$A_{точн}=\int_1^4 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21$$

Таким образом, при вычислении определенного интеграла по формуле Симпсона получено точное значение интеграла.

Тема 5.3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Содержание материала: *понятие о численном решении дифференциальных уравнений. Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение метода численного решения дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач.*

Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера

Рассмотрим метод Эйлера, применяемый при приближенном решении дифференциальных уравнений.

Найдем приближенно решение уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ (1)

на отрезке $[x_0,b]$,удовлетворяющее начальному условию при $x=x_0$, $y=y_0$. Разделим отрезок $[x_0,b]$ точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ на n равных частей (здесь $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$). Обозначим $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, следовательно, $h = \frac{b - x_0}{n}$.

Пусть $y = \varphi(x)$ есть некоторое приближенное решение уравнения (1) и

$y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, …, $y_n = \varphi(x_n)$,

Обозначим $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, …, $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$.

В каждой из точек x_0, x_1, x_2, …,x_n в уравнении (1) производную заменим отношением конечных разностей:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \tag{2}$$

$$\Delta y = f(x,y)\Delta x \tag{3}$$

При $x = x_0$ будем иметь $\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0)$, $\Delta y_0 = f(x,y)\Delta x$ или $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$.

В этом равенстве x_0, y_0, h известны, следовательно, находим: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$.

При $x = x_0$ уравнение (3) примет вид $\Delta y_1 = f(x_1, y_1)h$ или $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h$, $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$.

Здесь известными являются x_1, y_1, h, а y_2 определяется. Аналогично находим;

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h.$$

……………………

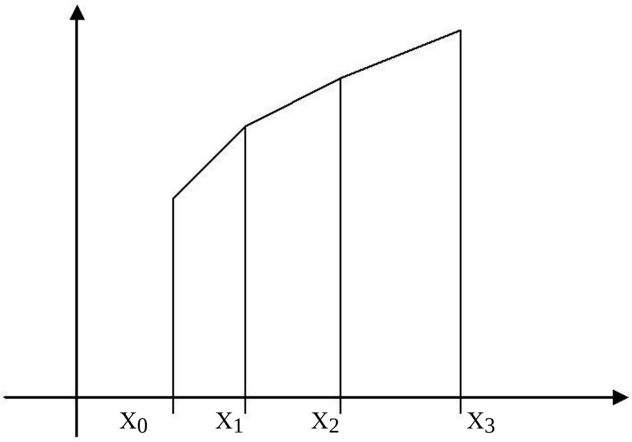
$$y_{к+1} = y_к + f(x_к, y_к)h.$$

……………………………

$$Y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.$$

Таким образом, приближенные значения решения в точках x_0, x_1, x_2, …,x_n найдены.

Соединяя на координатной плоскости точки (x_0,y_0), (x_1,y_1),…, (x_n,y_n), отрезками прямой, получим ломаную-



приближенное изображение интегральной кривой (рис.1)

Эта ломаная называется ломаной Эйлера.

Пример1. Найти приближенное при x = 1 значение решения уравнения $y' = y + x$, удовлетворяющего начальному условию: при $x_0 = 0$ $y_0 = 1$.

Решение: Разделим отрезок [0,1] на 10 частей точками $x_0 = 0$; 0,1; 0,2; …, 1. Следовательно, h= 0,1.

Значения y_1., y_2, …, y_n будем искать по формуле(3)

$\Delta y_к = (y_k + x_k)h$ или

$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h$

Таким образом, получаем:

$У_1 = 1 + (1 + 0)\cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1$,

$У_2 = 1,1 + (1,1 + 0.1)\cdot 0,1 = 1,21$

В процессе решения составляем таблицу:

$x_к$	$y_к$	$y_к + x_к$	$\Delta y_к = (y_к + x_к)\cdot h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0,1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0,2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0,3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0.4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0,5$	1,7164	2,2164	0.2216
$x_6 = 0,6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0,7$	2,1918	2,8918	0,2812
$x_8 = 0.8$	2,4730	3,2730	0,3273
$x_9 = 0,9$	2.8003	3.7003	0,3700
$x_{10} = 1.0$	3.1703		

Мы нашли приближенное значение $y|_{x=1} = 3,1703$. точное решение данного уравнения. Удовлетворяющее указанным начальным условиям, будет $y = 2\ell^x - x - 1$.Следовательно, $y|_{x=1} = 2(\ell - 1) = 3{,}4365$ Абсолютная погрешность; 0,2662; относительная погрешность

$$\frac{0{,}2662}{3{,}4365} = 0{,}077 \approx 8\%$$

Задания к контрольной работе

Вариант № 1

1. Найдите производную функций: $y = x^2 - 7x + 3$

2. Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной форме: $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i} - (1 + i\sqrt{3})$

3. Найдите интегралы:

a) $\int (x^4 - \frac{1}{2x} - 4)dx$ b) $\int \frac{\cos x dx}{4 + 3\sin x}$.

4. Вычислите определенные интегралы:

a) $\int_{-1}^{1} (5 - x - 3x^2)dx$ b) $\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 4}}$

5. Решите дифференциальное уравнение и найдите частное
решение, удовлетворяющее данным условиям:

$(1+x^2)\, y^3\, dx - (y^2 - 1)\, x^3\, dy = 0$; $y = 1$ при $x = 1$.

6. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «Крыша». Ребенок рассыпал буквы и собрал в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что у него снова получится слово «Крыша».

Вариант № 2

1. Найдите производную функций: $y = \sin 4x$.

2. Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной форме: $\frac{(-2+i)^2}{1+3i} - (0{,}1 - 0{,}3i)$.

3. Найдите интегралы:

a) $\int (3 - \frac{1}{3\sin^2 x} + 2x)dx$ b) $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$.

4. Вычислите определенные интегралы:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sqrt{25 - 3x^2}\, dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos x dx$

5. Решите дифференциальное уравнение и найдите частное решение, удовлетворяющее данным условиям:

$tgx \cdot \sin^2 y dx + \cos^2 x \cdot ctg\, y\, dy = 0$, если $y = \frac{\pi}{4}$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

6. Карточка «Лотерея» содержит 36 чисел. В тираже участвует 5 чисел. Какова вероятность того, что верно будет угадано 5 чисел.

Вариант № 3

1. Вычислите определенный интеграл $\int_0^2 (x^2 - 3x + 2)dx;$

2. Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной форме: $\frac{2(1 + i\sqrt{3})}{1 - i} - (1 + i\sqrt{3})$

3. Найдите интегралы:

a) $\int (3x^5 - \cos x - 1)dx,$ b) $\int \cos 3x dx$

4. Вычислите определенные интегралы:

a) $\int_{-2}^{2} (1 + x)^2 dx$ b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9 - 5x^2}} dx.$

5. Решите дифференциальное уравнение и найдите частное решение,

удовлетворяющее данным условиям:

$y' \cdot tgx - y = 1$, если $y = -\frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{6}$.

6. Имеется 100деталей, из которых возможны 4% бракованных. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь – бракованная?

Вариант № 4

1. Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2xdx.$

2. Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной форме: $\frac{(1 - 3i)(1 + 3i)}{-3 - i} - 2i^{19}$

3. Найдите интегралы:

a) $\int (x - \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^2}} + 2)dx$ b) $\int x \cdot 2^{x^2} dx$

4. Вычислите определенные интегралы:.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{8 - 7 \sin x}} dx,$$

5. Решите дифференциальное уравнение и найдите частное решение, удовлетворяющее данным условиям:

$(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0$, если $y = 1$ при $x = 0$.

6. В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

ПРИЛОЖЕНИЯ

1.Формулы сокращенного умножения

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

2.Таблица значений тригонометрических функций

α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α (deg)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(a^x)' = a^x \ln a$;
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
8. $(\sin x)' = \cos x$;
9. $(\cos x)' = -\sin x$;
10. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\mathrm{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;
15. $(\mathrm{ar\,cctg} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

5.Табличные интегралы

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$

10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

11. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Список использованной литературы:

1. Основные источники:
1.1 Богомолов Н.В. Математика: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Математика : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 396 с. — Режим доступа: - URL: https://www.biblio-online.ru/book/F7C570BC-85B6-4E2D-9B5A-4CB297E61C8E
1.2Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 285 с. — Режим доступа: - URL: https://www.biblio-online.ru/book/B2077BBB-EF95-4E5F-AFE1-9AAB6EB69A17

2. Дополнительные источники:

2.1 Дорофеева, А. В. Математика. Сборник задач : учебно-практическое пособие для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — 2-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08796-3. — URL : https://urait.ru/bcode/449051

2.2 Дегтярева, О.М. Краткий теоретический курс по математике для бакалавров и специалистов: учебное пособие / О.М. Дегтярева, Г.А. Никонова; Министерство образования и науки России, ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 136 с.: ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1523-5; То же [Электронный ресурс]. - URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=427858

2.3 Зализняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике: учебное пособие / В.Е. Зализняк, Г.И. Щепановская; Министерство образования и науки РФ, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. - 174 с.: табл. - ISBN 978-5-7638-2498-8; То же [Электронный ресурс]. - URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229271

3. Интернет-ресурсы:

3.1ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: http://biblioclub.ru/
3.2Электронная библиотечная система «Лань»: http://e.lanbook.com/
3.3Сайт: http:// shool-collection.edu.ru
3.4«Квант». Форма доступа: www.kvant.mirror1.mccme.ru