

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА  
Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта -  
филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»  
(УУКЖТ ИрГУПС)



Н.В.Дубович

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
по выполнению контрольной работы  
дисциплины ЕН.01 Математика

для специальности

23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог  
(ЛОКОМОТИВЫ)

*Базовая подготовка*  
*среднего профессионального образования*

*Заочная форма обучения*

Улан-Удэ

2022

1

Электронный документ выгружен из ЕИС ФГБОУ ВО ИрГУПС и соответствует оригиналу

Подписант ФГБОУ ВО ИрГУПС Трофимов Ю.А.

00a73c5b7b623a969ccad43a81ab346d50 с 08.12.2022 14:32 по 02.03.2024 14:32 GMT+03:00

Подпись соответствует файлу документа



УДК 51 (07)

ББК 22.1

Д-796

Дубович Н.В.

Д-796 **ЕН.01 Математика:** Методические указания по выполнению контрольной работы для обучающихся среднего профессионального образования заочной формы обучения специальности 23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог (локомотивы) / Н.В.Дубович; Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта ИрГУПС. - Улан-Удэ: Сектор информационного обеспечения учебного процесса УУКЖТ ИрГУПС, 2022. – 42с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплине «Математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании Методического совета колледжа протокол № 5 от 19.04.2022

© Дубович Н.В., 2022

© УУКЖТ ИрГУПС, 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания.....	4
Теоретический материал.....	5
Раздел 1. Линейная алгебра.....	5
Раздел 2 Математический анализ.....	16
Раздел 3. Основные численные методы.....	28
Задания к контрольной работе.....	35
Список использованной литературы:.....	40

## ***Требования к выполнению и оформлению контрольной работы***

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплинам «Математика» и «Прикладная математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту заочной формы обучения самостоятельно справиться с выполнением контрольной работы, научиться решать задачи по всем разделам курса по данным дисциплинам.

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради школьного формата.

2. На обложке тетради наклеивается информационный лист с указанием: шифра, специальности, фамилии, имени, отчества студента, предмет и номер работы.

3. Работа должна быть выполнена пастой одного цвета, аккуратно и разборчиво.

4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.

5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием.

6. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью в контрольную тетрадь.

7. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения. Перечислим важнейшие из этих требований:

- необходимо соблюдать абзацы, всякую новую мысль следует начинать с красной строки;

- важные формулы, равенства, определения нужно выделять в отдельные строки. Чтобы сделать их более обозримыми;

- при описании решения задачи краткая запись условия отделяется от решения и в конце решения ставится ответ;

- серьезное внимание следует уделять правильному написанию сокращенных единиц величин;

- необходимо правильно употреблять математические символы.

8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

9. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

10. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались. Проставить дату выполнения работы и подпись.

11. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то студент должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.

12. Контрольная работа должна быть выполнена в срок (в соответствии с учебным планом).

13. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается студенту без оценки.

14. Студент, не имеющий зачета по контрольной работе, к экзамену не допускается.

15. Во время экзамена зачтенные контрольные работы представляются преподавателю вместе с данными методическими указаниями.

16. Контрольная работа имеет 4 варианта. Вариант работы выбирается преподавателем.

## **Теоретический материал**

### **Раздел 1. Линейная алгебра**

#### ***Комплексные числа***

##### **1. Комплексные числа и действия над ними.**

Решение многих задач сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому исследование алгебраических уравнений является одним из важнейших вопросов математики.

Действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое алгебраическое уравнение. Например, уравнение  $x^2 + 1 = 0$  не имеет действительных корней. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел до множества, такого, чтобы в этом множестве уравнение вида  $x^2 + a^2 = 0$  имели решения.

Корень уравнения  $x^2 + 1 = 0$  или  $x^2 = -1$  называется *мнимой*

единицей и обозначается  $i$ .

Число вида  $z = a + bi$ , где  $a$  и  $b$  – любые действительные числа, а  $i$  – мнимая единица, определяемая равенством  $i^2 = -1$ , называется **комплексным числом**.

Запись комплексного числа в виде  $z = a + bi$  называется **алгебраической формой** записи комплексного числа.

Действительное число  $a$  называется **действительной частью** комплексного числа вида  $z = a + bi$ , а число  $bi$  – **мнимой частью**.

Два комплексных числа  $z = a_1 + i b_1$  и  $z = a_2 + i b_2$  считаются **равными**, если соответственно равны их действительные и мнимые части:  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 i = b_2 i$

Два комплексных числа называют **сопряженными**, если они отличаются друг от друга только знаком перед мнимой частью. Сопряженные комплексные числа обозначают:  $z$  и  $\bar{z}$ . Например,  $z_1 = 1 + 2i$  и  $\bar{z}_1 = 1 - 2i$ ;

### **Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме**

Пусть даны комплексные числа:  $z_1 = a + bi$  и

$z_2 = c + di$ . 1. Сложение  $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ .

2. Вычитание  $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

3. Умножение

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

4. Возведение комплексного числа в степень производится по формулам возведения двучлена в соответствующую степень, но при

этом надо

учитыва

ть, что  $i^4$

$= i, i^4$

$= i, i^4$

$= i, i^4$

$i^2 = -1, i^4$

$= i^2 = -$

$1,$

$i^3 = -i, i^{4n+3} = i^2 = -i,$

$i^4 = 1, i^{4n} = 1$

5. При делении двух комплексных чисел в алгебраической форме, необходимо умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

### Пример 1.

1.  $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = (2 + 5) + (3 - 7)i = 7 - 4i$ ;

2.  $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = (2 - 5) + (3 - (-7))i = -3 + 10i$ ;

3.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i$$

4.  $(2 + 3i)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$ ;

$$(3 + 5i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9i^2 + 27i^3, \text{ так как } i^2 = -1, i^3 = -i,$$

то получим  $(3 + 5i)^3 = 125 + 225i - 135 - 27i = -10 + 198i$

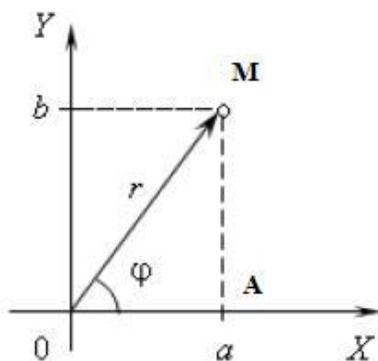
5. 
$$\frac{2 + 3i}{5 - 7i} = \frac{(2 + 3i) \cdot (5 + 7i)}{(5 - 7i) \cdot (5 + 7i)} = \frac{10 + 14i + 15i + 21i^2}{5^2 - (7i)^2} = \frac{10 + 29i - 21}{25 - 49i^2} = \frac{-11 + 29i}{25 + 49} = \frac{-11 + 29i}{74}$$

$$-\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i.$$

### Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Любое комплексное число  $z = a + bi$  можно изобразить на комплексной плоскости точкой  $Z$  с координатами  $(a; b)$ . Модулем комплексного числа называется длина вектора  $OM$ ,

изображающего комплексное число на координатной (комплексной) плоскости:  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ .



||

Пусть дано комплексное число  $z = a + bi$ , выразим действительные числа  $a$  и  $b$  через модуль  $r$  и аргумент  $\varphi$  числа  $z$  следующим образом:  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$ . Таким образом, комплексное число можно записать в виде  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $r$ -модуль комплексного числа, а  $\varphi$  – один из его аргументов. Представление

комплексного числа в указанном виде называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Итак, существует три формы записи комплексного числа:  $z = a + bi$  - алгебраическая форма;  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  - тригонометрическая форма;

$z = re^{i\varphi}$  - показательная форма.

**Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной:**

1. Найти модуль  $r$  комплексного числа находим по формуле:  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

2. Изобразить комплексное число на комплексной плоскости и определить четверть, в которой находится точка  $Z$ .

3. В зависимости от четверти, найти аргумент  $\varphi$  комплексного числа

4. Записать число в тригонометрической форме, подставив все найденные значения в формулу:  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,

в показательной -  $z = re^{i\varphi}$ .

**Пример.** Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число  $z = 3 + \sqrt{3}i$ .

**Решение:**

1) находим модуль комплексного числа:

$$a = 3; b = \sqrt{3}$$

$$|z| = r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}.$$

2) находим главное значение аргумента комплексного числа  $z$ : так как вектор, изображающий число  $z$  лежит в I четверти и

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ то } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

3) находим тригонометрическую форму:  $z = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ , находим показательную форму:  $z = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$ .



## Свойства определителей и их вычисление

**Содержание материала:** определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

**1. Матрицей** называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит  $m$  строк и  $n$  столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента  $a_{ij}$ , первый индекс  $i$  означает номер строки, а второй индекс  $j$  - номер столбца.

10

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ( $m \neq n$ ), то матрица называется *прямоугольной*. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Если число строк равно числу столбцов ( $m = n$ ), то матрица называется *квадратной*. Например, квадратными являются матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, в последнем примере порядок матрицы  $A$  равен 2, а порядок матрицы  $B$  равен 3.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк  $m$  и одинаковое число столбцов  $n$  и их соответствующие элементы равны. Так, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \text{ равны, если } a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12},$$

$$a = b, a_{13} = b_{13}, a_{21} = b_{21}, a_{22} = b_{22}, a_{23} = b_{23}.$$

Равные матрицы обязательно либо обе они прямоугольные типа того же порядка  $n$ . имеют одно и то же строение:  $m \times n$ ,

### Линейные операции над матрицами

**Суммой** матриц  $A$  и  $B$  называют такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ . Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа  $m \times n$ , или квадратные порядка  $n$ .

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда сумма матриц  $C = A+B$  имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}.$$

**Пример 1.** Сложить матрицы  $A$  и  $B$ , если:

а)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix};$

б)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

в)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$

*Решение:*

а) Здесь  $A$  и  $B$  - квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Здесь  $A$  и  $B$  - прямоугольные матрицы типа  $2 \times 3$ . Складываем

их соответствующие элементы:  $C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$

в) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как  $A$  есть матрица типа  $3 \times 2$ , а  $B$  - матрица типа  $2 \times 3$ ; можно складывать только

прямоугольные матрицы одного типа.

Таким образом, сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяется переместительный закон сложения:  $A+B=B+A$ .

**Произведением матрицы  $A$  на число  $k$**  называется такая матрица  $kA$ , каждый элемент которой равен  $ka_{ij}$ , т. е. если  $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

**Пример 2.** Умножить матрицу  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  на число  $k = 3$ .

*Решение:* Умножая каждый элемент матрицы  $A$  на  $3$ , получим:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ , тогда **произведением** этих

матриц называется матрица  $C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$ . Чтобы найти элемент  $c_{11}$  первой строки и

первого столбца матрицы  $C$ , нужно каждый элемент первой строки матрицы  $A$  (т. е.  $a_{11}$  и  $a_{12}$ ) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы  $B$  (т.е.  $b_{11}$  и  $b_{21}$ ) и полученные произведения сложить; чтобы найти элемент  $c_{12}$  первой строки и второго столбца матрицы  $C$ , нужно умножить все элементы первой строки ( $a_{11}$  и  $a_{12}$ ) на соответствующие элементы второго столбца ( $b_{12}$  и  $b_{22}$ ) и полученные произведения сложить; аналогично находятся элементы  $c_{21}$  и  $c_{22}$ .

**Пример 3.** Найти произведение матриц  $A$  и  $B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 11 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц, при чем справедливы правила:

1) умножение матрицы А на матрицу В имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, т. е.  $AB \neq BA$ .

2. Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя переменными  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 ; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 ; \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 . \end{cases}$$

**Определителем третьего порядка** называется число, вычисляемое по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3$$

Правая часть состоит из алгебраической суммы шести членов, из которых три взяты со знаком «плюс», а три со знаком «минус». Со знаком «плюс» входят произведения элементов, лежащих по *главной диагонали*, а также произведения элементов, лежащих на параллелях к этой диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя, а со знаком «минус» – произведения элементов побочной диагонали, а также произведения элементов, лежащих на параллелях к *побочной диагонали*, с

добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя. Это правило называют **правилом треугольника**.

**Пример 1.** 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 10 - 0 + 1 + 24 = 53.$$

**Алгоритм решения систем трех уравнений с тремя неизвестными методом Крамера:**

1. Вычислить главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

2. Вычислить определитель  $\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

3. Вычислить определитель  $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};$

4. Вычислить определитель  $\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix};$

5. В зависимости от полученных значений определить решение системы исходя из трех возможных случаев:

- если определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение:  $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ ,  $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ ,  $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$ ;

- если  $\Delta = 0$ , а  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  одновременно не равны нулю (т.е.  $\Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 z > 0$ ), то система не имеет решений;

- если  $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ , то система имеет множество решений.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 14, \\ 3x - y + 2z = 5, \end{cases}$$

**Пример 1.** Решить систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} x + 2y - z = 7.$$

*Решение.*

Вычислим главный определитель системы:  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16.$

Так как  $\Delta \neq 0$ , система имеет единственное решение. Вычислим теперь  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$ ,  $\Delta_z$ :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 32; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 48; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 16.$$

Подставив найденные определители в формулы Крамера, получим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1.$$

Ответ: (2; 3; 1).

## Раздел 2. Математический анализ

### *Дифференциальное и интегральное исчисление*

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на некотором промежутке. Возьмем из этого промежутка фиксированное значение аргумента  $x$  и придадим ему приращение  $\Delta x$  так, чтобы новое значение аргумента  $x + \Delta x$  принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции  $f(x)$  заменится новым значением  $f(x) + \Delta y = f(x + \Delta x)$ , т.е. функция получит приращение  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

Предел отношения приращения функции  $\Delta y$  к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю называется *производной функции*  $y = f(x)$ , т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Если функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

### **Производная сложной функции**

Сложная функция – это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций, а не какую-то ее особенную сложность. Например, функция  $y = \sin 3x$  является сложной. Если обозначить  $3x = u$ , то получим  $\sin u$ , где  $u$  – промежуточная функция. В сложную функцию может входить не одна, а несколько промежуточных функций. Например, для функции  $y = \cos^2 2x$  промежуточными функциями служат  $u = \cos v$  и  $v = 2x$ .

**Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:**

$$y' (x) = y' (u) \cdot u' (x).$$

**Примеры.**

**1.  $y = (x^2 + 3x)^5$**

**Решение.** Полагая  $u = x^2 + 3x$ , получим  $y = u^5$ . По формуле (10) находим  $y' = 5(u)^4 (u)' = 5(x^2 + 3x)^4 (x^2 + 3x)' = 5(x^2 + 3x)^4 (2x + 3)$ .

Такая подробная запись производится только в процессе освоения техники дифференцирования. При навыке промежуточные вычисления производятся в уме.

Ответ:  $y' = 5(x^2 + 3x)^4 (2x + 3)$ .

**2.  $y = \sin 3x$**

**Решение.** Полагая  $u = 3x$ , получим  $y = \sin u$ . По формуле (13)

$$y' = \cos u (u)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cos 3x.$$

Ответ:  $y' = 3 \cos 3x$ .

**3.  $y = \ln \cos x$**

**Решение.** Полагая  $\cos x = u$ ; получим  $y = \ln u$ ; По формуле (8)

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$\text{Ответ: } y' = -\text{tg}x.$$

$$4. y = 2^{\ln x}$$

Решение. Полагая  $\ln x = u$ , получим  $y = 2^u$ . По формуле (12).  $y' = (2^u)' = 2^u \ln 2 \cdot u'$

$$y' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x)' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x};$$

## Неопределенный интеграл

### 1. Основные формулы интегрирования

Функция  $F(x)$  называется *первообразной* для функции  $f(x)$  в промежутке  $a \leq x \leq b$ , если в любой точке этого промежутка ее производная равна  $f(x)$ :

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \leq x \leq b.$$

Отыскание первообразной функции по заданной ее производной  $f(x)$  или по дифференциалу  $f(x)dx$  есть действие, обратное дифференцированию, - интегрирование.

Совокупность первообразных для функции  $f(x)$  или для дифференциала  $f(x)dx$  называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом  $\int f(x)dx$ .

Таким образом  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , если  $d(F(x) + C) = f(x)dx$ .

Здесь  $f(x)$  подынтегральная функция;  $f(x)dx$  - подынтегральное выражение;  $C$  - произвольная постоянная.

### Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx, \quad (\int f(x)dx)' = f(x).$$

3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$



4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

5. Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$  и  $u = \varphi(x)$  – любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то  $\int f(u)du = F(u) + C$ .

### Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов (смотри приложение 5). Здесь могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

#### Пример.

Найти следующие интегралы:

$$1. \int 5dx; \quad 2. \int 4(x^2 - x + 3)dx; \quad 3. \int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx; \quad 4. \int \frac{dx}{x^4}.$$

1. На основании свойства 4 постоянный множитель 5 выносим за знак интеграла и, используя формулу (1), получим

$$\int 5dx = 5x + C.$$

2. Используя свойство 3 и 4 и формулу (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \int 4(x^2 - x + 3)dx &= 4 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 12 \int dx = \\ &= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C \end{aligned}$$

3. Используя свойство 3 и 4 и формулу (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx &= 4 \int x^3 dx - 15 \int x^2 dx + 14 \int x dx - 3 \int dx = \\ &= 4 \frac{x^4}{4} - 15 \frac{x^3}{3} + 14 \frac{x^2}{2} - 3x + C = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + C. \end{aligned}$$

4. Используя формулу (2), находим:

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

### Способ подстановки

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Этот метод называют также *методом замены переменной*. Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Он заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Естественно возникает вопрос: как правильно выбрать подстановку? Это достигается практикой в интегрировании. Все же можно установить ряд общих правил и некоторые приемы для частных случаев интегрирования.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменной.

4. Производят замену под интегралом.

5. Находят полученный интеграл.

6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

### Примеры.

1. Найти  $\int (2+x)^7 dx$ .

$$\int (2+x)^7 dx = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{(2+x)^8}{8} + C.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2+x=t \\ (2+x)'dx=dt \\ \hline dx=dt \end{array} \right|$$

Ответ:  $\frac{(2+x)^8}{8} + C$

### Определенный интеграл

Определение. Если  $F(x) + C$  – первообразная функция для  $f(x)$ , то приращение  $F(b) - F(a)$  первообразных функций при изменении аргумента  $x$  от  $x = a$  до  $x = b$  называется *определенным интегралом*.

$b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

где  $a$  - нижний предел, а  $b$  – верхний предел определенного интеграла.

Для вычисления определенного интеграла *применяется формула*

*Ньютона – Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Все методы интегрирования, используемые при нахождении неопределенных интегралов, применяются и при вычислении определенных интегралов. Числовое значение определенного интеграла зависит от вида функции, стоящей под знаком интеграла, и от значений верхнего и нижнего пределов и не зависит от обозначения переменной.

1. Вычисление определенных интегралов по готовым формулам:

$$1. \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}.$$

2.

$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^2 = \left[ \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \right] - \left[ \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) \right] = 9.$$

## **Обыкновенные дифференциальные уравнения**

### **Понятие о дифференциальном уравнении**

*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y$  и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y') = 0, F(x, y, y'') = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

*Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

*Решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

*Общим решением* (или *общим интегралом*) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

*Частным решением* дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Задача, нахождения частного решения, удовлетворяющих начальным условиям, называется задачей Коши.

### **1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка.**

**Дифференциальным уравнением первого порядка** называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

**Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными** называется уравнение вида  $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$ .

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

**Решить уравнения:**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$3dx - y^2 dy + xdx = 0;$$

Чтобы произвести разделение переменных, надо сгруппировать члены с  $dx$  и записать полученные функции в разных частях равенства:

$$y^2 dy = (3 + x) dx;$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными, интегрируем:

$$\int y^2 dy = \int (3 + x) dx; \quad \frac{y^3}{3} = 3x + \frac{x^2}{2} + C; \quad \frac{y^3}{3} - 3x - \frac{x^2}{2} = C;$$

Общее решение данного уравнения.

Ответ:  $\frac{y^3}{3} - 3x - \frac{x^2}{2} = C;$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения:  $1 + y - xy' = 0:$

Заменим  $y'$  на  $\frac{dy}{dx}$ , получим  $1 + y - x \frac{dy}{dx} = 0;$

Умножим все члены на  $dx$   $dx + ydx - x dy = 0;$

Сгруппируем члены с  $dx$  .  $(1 + y) dx - x dy = 0;$

Запишем полученные функции в разных частях равенства:

$$x \, dy = (1 + y) \, dx; \text{ разделив переменные имеем: } \frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{x};$$

Интегрируем обе части полученного уравнения

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ln(1+y) = \ln x + \ln C; \quad \ln(1+y) = \ln(xC);$$

$$1 + y = x \cdot C; \quad y = x \cdot C - 1; \text{ Общее решение уравнения.}$$

$$\text{Ответ: } y = x \cdot C - 1.$$

**3.** Найти общее решение уравнения  $x(1 + y^2)dy = ydx$ .

Разделив переменные, имеем

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{xdx}{x}$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{xdx}{x}; \quad \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \frac{1}{2} \ln C.$$

Так как произвольная постоянная  $C$  может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований

вместо  $C$  мы написали  $\frac{1}{2} \ln C$ .

Потенцируя последнее равенство, получим

$$x^2 = \ln(C(1+y^2))$$

Это и есть общее решение данного уравнения.

$$\text{Ответ: } x^2 = \ln(C(1+y^2))$$

**4.** Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$$\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}; \quad y = 4 \text{ при } x = 0.$$

Разделив переменные, имеем

$$(y-2) \, dy = (x-1) \, dx;$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int (y-2)dy = \int (x-1)dx; \quad \int ydy - \int 2dy = \int xdx - \int dx;$$

$$\frac{y^2}{2} - 2y = \frac{x^2}{2} - x + C;$$

Это общее решение данного уравнения.

Для нахождения значения произвольной постоянной  $C$  подставим значения

$$y = 4; x = 0; \quad \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 = \frac{0^2}{2} - 0 + C; \quad 8 - 8 = 0 - 0 + C; \quad C = 0;$$

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид  $y^2 - 4y = x^2 - 2x$ ;  $x^2 - y^2 + 4y - 2x = 0$ .

Ответ:  $x^2 - y^2 + 4y - 2x = 0$ .

На основании решенных примеров очевиден алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

- Выражают производную функции через дифференциалы  $dx$  и  $dy$ .
- Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.
- Разделяют переменные.
- Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.
- Если заданы начальные условия, то находят частное решение. В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

## ***Ряды***

*Числовым рядом* называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

где числа  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$  называемые *членами ряда*, образуют бесконечную последовательность; член  $u_n$  называется *общим членом ряда*.

Суммы	$S_1 = a_1$
	$S_2 = a_1 + a_2$
	$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
	.....
	$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

составленные из первых членов ряда, называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм

$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ . Если последовательность  $(S_n)$  сходится, т.е. имеет предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то числовой ряд называется *сходящимся*,

а  $S$  – суммой ряда. В противном случае ряд называется *расходящимся*.

### 1. Необходимый признак сходимости ряда.

Ряд  $\sum_{n \rightarrow 1}^{n \rightarrow \infty} u_n$  может сходиться только при условии, что его общий член  $u_n$  при неограниченном увеличении номера  $n$  стремится к нулю;

$$\sum_{n \rightarrow 1}^{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

$n \rightarrow \infty$

Если  $\sum_{n \rightarrow 1}^{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n \rightarrow 1}^{n \rightarrow \infty} u_n$  расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

**Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.**

### 1. Признак сравнения рядов с положительными членами.

*Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.*

### 2. Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n \rightarrow 1}^{n \rightarrow \infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots (u_n > 0)$$

Выполняется условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , то ряд сходится при  $l < 1$  и расходится при  $l > 1$

Признак Даламбера не дает ответа, если  $l = 1$ . В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

**3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.**

Числовой ряд  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$  называется *знакопеременным*,



если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд  $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$  называется *знакопеременным*, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

**Признак сходимости Лейбница для знакопеременных рядов.**

*Если члены знакопеременного ряда  $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$  монотонно убывают по абсолютной величине и общий член  $u_n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд  $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$  сходится.*

Этот признак служит достаточным признаком сходимости знакопеременных рядов.

Знакопеременный ряд  $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$  называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд  $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\dots+|u_n|+\dots$ , составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд  $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$  сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд

$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\dots+|u_n|+\dots$  расходится, то данный ряд называется *условно*

*(неабсолютно) сходящимся.* Заметим, что из расходимости ряда

$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\dots+|u_n|+\dots$  в общем случае не следует расходимость ряда  $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ .

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного (и знакопеременного) ряда используются те же признаки, что и для сходимости ряда с положительными членами.

**5.Ряд Фурье**

Тригонометрическим рядом Фурье для функции  $f(x)$  в промежутке изменения аргумента

$-\pi \leq x \leq \pi$  называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots$$

(1)

Или, короче

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2)$$

—  
=1

где  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  коэффициенты ряда, называемые *коэффициентами Фурье*

**Коэффициенты ряда Фурье.**

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

**Пример.**

1. Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} + \dots;$$

Решение.

Находим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} = 0$ . Необходимый признак

сходимости ряда выполняется, но для решения вопроса о сходимости  
39

нужно применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, \quad \text{который сходится, так как } q = \frac{1}{2} < 1.$$

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3 \cdot 2^2} < \frac{1}{2}; \frac{1}{5 \cdot 2^3} < \frac{1}{2^3}; \dots; \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}; \dots,$$

т.е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

2. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n} = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \dots + \frac{2n}{5^n} + \dots;$$

Решение.

Подставив в общий член ряда  $\frac{2n}{5^n}$  вместо  $n$  число  $n+1$ , получим

$$\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$$

Найдем предел отношения  $(n+1)$ -го члена к  $n$ -му члену при

$n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{2n} = \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{5} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

## Раздел 3 Основные численные методы

### Численное интегрирование

#### Приближенное вычисление определенных интегралов

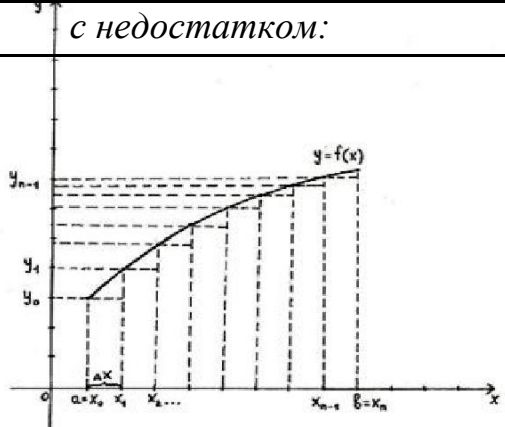
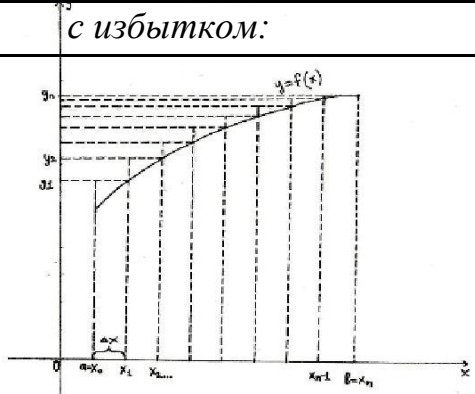
Часто приходится вычислять определённые интегралы, для которых невозможно найти первообразную. В этом случае применяют приближённые методы вычисления. Иногда приближённый метод применяют и для “берущихся” интегралов, если вычисление по формуле Ньютона-Лейбница не рационально. Идея приближённого вычисления интеграла заключается в том, что кривая  $y = f(x)$  заменяется новой, достаточно “близкой” к ней кривой. В зависимости от выбора новой кривой можно использовать ту или иную приближённую формулу интегрирования. Рассмотрим три приближенных метода: метод прямоугольников, метод трапеций, метод парабол (метод Симпсона).

#### Метод прямоугольников

Геометрически идея способа вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников состоит в том, что площадь криволинейной трапеции ABCD заменяется суммой площадей

прямоугольников, одна сторона которых равна  $\frac{b-a}{n}$ , а другая -

$y = f(x_n)$ . Если суммировать площади прямоугольников, которые показывают площадь криволинейной трапеции с недостатком и избытком, то получим формулы:

с недостатком:	с избытком:
	
$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$	$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$

Значения  $y_0, y_1, \dots, y_n$  находят из равенств  $y_k = f(a + k\Delta x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . С увеличением  $n$  результат становится более точным.

Итак, чтобы найти приближённое значение интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$
 по

формуле прямоугольников, необходимо:

- разделить отрезок интегрирования  $[a, b]$  на  $n$  равных частей точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ ;
- вычислить значения подынтегральной функции  $y = f(x)$  в точках деления, т.е. найти  $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$ ;
- воспользоваться одной из приближённых формул.

Для того, чтобы найти погрешность вычислений, надо воспользоваться формулами:

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} A & -A \\ \text{точн} & \text{прибл} \end{array} \right|$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\left| \begin{array}{c} A \\ \text{точн} \end{array} \right|} \cdot 100\%$$

55

**Пример 1.** Вычислить по формуле прямоугольников  $\int \cos x dx$ .

**Решение:** Разделим промежуток интегрирования на 5 частей. Тогда

$n = 5$ ;  $b - a = \frac{\pi}{4}$ ;  $\Delta x = \frac{b - a}{5} = \frac{\pi}{20} \approx 0,1571$ . Найдем значения подынтегральной функции (с точностью до 4-х знаков после запятой):

$$y_0 = \cos 0^\circ = 1,0000 ;$$

$$y_1 = \cos \left( \frac{\pi}{20} \right) = \cos 9^\circ = 0,9877 ; y_2 = \cos \left( \frac{\pi}{10} \right) = \cos 18^\circ = 0,9511 ;$$

$$y_3 = \cos \left( \frac{3\pi}{20} \right) = \cos 27^\circ = 0,8910 ; y_4 = \cos \left( \frac{\pi}{5} \right) = \cos 36^\circ = 0,8090 ;$$

$$y_5 = \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) = 0,7071 .$$

Тогда, по формуле прямоугольников (с недостатком):

$$A_{\text{прибл}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \approx 0,1571 \cdot (0,9877 + 0,9511 + 0,8910 + 0,8090 + 0,7071) = 0,7282$$

С другой стороны, по формуле Ньютона Лейбница:

$$A_{\text{точн}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

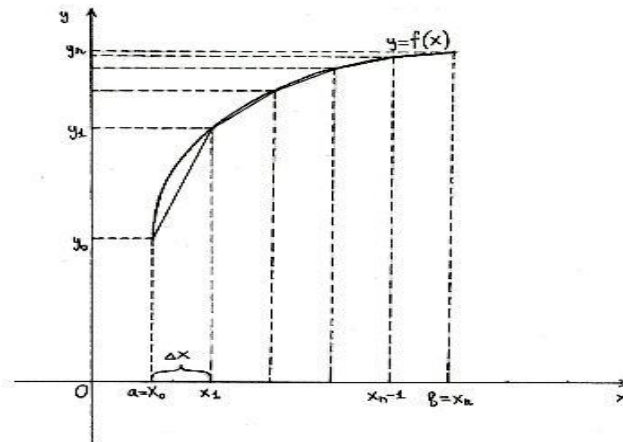
Найдем относительную погрешность вычисления по формуле прямоугольников:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A_{\text{точн}}|} \cdot 100\% = \frac{\left| 0,6827 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 100\% = 3,45\%$$

## Метод трапеций

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right)$$



**Пример 2.** Вычислить по формуле трапеций  $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ , при  $n = 5$ .

**Решение:** Промежуток интегрирования разделен на 5 частей, тогда

$\Delta x = \frac{b-a}{5} = 1$  и  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = 2$ ;  $x_3 = 3$ ;  $x_4 = 4$ ;  $x_5 = 5$ . Найдем

значения подынтегральной функции (с точностью до 3-х знаков после запятой):  $y_0 = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0,5$ ;  $y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \approx 0,447$ ;  $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2+4}} \approx 0,409$ ;

$y_3 = \frac{1}{\sqrt{3+4}} \approx 0,377$ ;  $y_4 = \frac{1}{\sqrt{4+4}} \approx 0,353$ ;  $y_5 = \frac{1}{\sqrt{5+4}} = \frac{1}{3}$ . Тогда по формуле

трапеций, получим:

$$A_{\text{прибл}} = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 1 \cdot (0,416 + 0,447 + 0,409 + 0,377 + 0,353) = 2,002$$

С другой стороны, по формуле Ньютона Лейбница:

$$A_{\text{точн}} = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} = (2\sqrt{x+4}) \Big|_0^5 = 6 - 4 = 2$$

Найдем относительную погрешность вычисления по формуле трапеций:

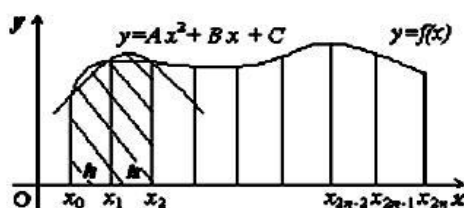
$$\delta = \frac{\Delta}{\left| \underset{\text{точн}}{A} \right|} \cdot 100\% = \frac{\underset{\text{прибл}}{2} - 2,002}{2} \cdot 100\% = 0,2\%$$

## Метод Симпсона

Суть метода заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающие элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси Оу. Тогда криволинейную трапецию заменяют не суммой площадей прямолинейных фигур, как в предыдущих методах, а суммой площадей криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} (y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}))$$

где  $n$  - четное число.



**Пример 3.** Вычислить по формуле Симпсона  $\int_1^4 x^2 dx$ .

**Решение:** Разделим промежуток интегрирования на 10 равных частей. Тогда  $\frac{b-a}{3n} = \frac{3}{30} = 0,1$ . Подставляя в подынтегральную функцию  $y = x^2$  значения аргумента:  $x_0 = 1; x_1 = 1,3; x_2 = 1,6, \dots, x_{10} = 4$ , найдем соответствующие значения ординат  $y_0 = 1, y_1 = 1,69; y_2 = 2,56; y_3 = 3,61; y_4 = 4,84; y_5 = 6,25; y_6 = 7,84; y_7 = 9,61; y_8 = 11,56; y_9 = 13,69; y_{10} = 16$ . Тогда, по формуле Симпсона получим:

$$A_{\text{прибл}} = \int_1^4 x^2 dx \approx 0,1 \cdot ((1 + 16) + 2(2,56 + 4,84 + 7,84 + 11,56) + 4(1,69 + 3,61 + 6,25 + 9,61 + 13,69)) = 21.$$

Вычисление по формуле Ньютона Лейбница дает:

$$A_{\text{точн}} = \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$$

Таким образом, при вычислении определенного интеграла по формуле Симпсона получено точное значение интеграла.

### **Тема 5.3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений**

**Содержание материала:** понятие о численном решении дифференциальных уравнений. Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение метода численного решения дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач.

#### **Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера**

Рассмотрим метод Эйлера, применяемый при приближенном решении дифференциальных уравнений.

Найдем приближенно решение уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  (1)

на отрезке  $[x_0, b]$ , удовлетворяющее начальному условию при  $x = x_0, y = y_0$ . Разделим отрезок  $[x_0, b]$  точками  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  на  $n$



равных частей (здесь  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ). Обозначим  $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$ , следовательно,  $h = \frac{b - x_0}{n}$ .

Пусть  $y = \varphi(x)$  есть некоторое приближенное решение уравнения (1) и

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), \dots, y_n = \varphi(x_n),$$

$$\text{Обозначим } \Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

В каждой из точек  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  в уравнении (1) производную заменим отношением конечных разностей:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \tag{2}$$

$$\Delta y = f(x, y) \Delta x \tag{3}$$

При  $x = x_0$  будем иметь  $\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x$  или

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0) h.$$

В этом равенстве  $x_0, y_0, h$  известны, следовательно, находим:  $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) h$ .

При  $x = x_1$  уравнение (3) примет вид  $\Delta y_1 = f(x_1, y_1) h$  или  $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1) h, y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) h$ .

Здесь известными являются  $x_1, y_1, h$ , а  $y_2$  определяется. Аналогично находим;

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) h.$$

.....

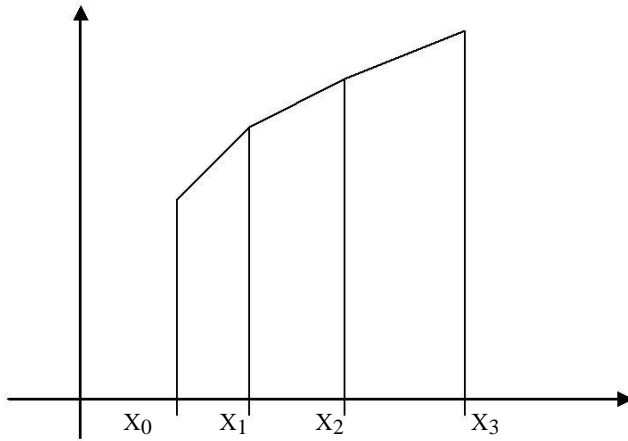
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) h.$$

.....

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) h.$$

Таким образом, приближенные значения решения в точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  найдены.

Соединяя на координатной плоскости точки  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , отрезками прямой, получим ломаную-



приближенное изображение интегральной кривой (рис.1)

Эта ломаная называется ломаной Эйлера.

**Пример1.** Найти приближенное при  $x = 1$  значение решения уравнения  $y' = y + x$ , удовлетворяющего начальному условию: при  $x_0$

$=0 \quad y_0 = 1$ .

*Решение:* Разделим отрезок  $[0,1]$  на 10 частей точками  $x_0 = 0; 0,1; 0,2; \dots, 1$ . Следовательно,  $h = 0,1$ .

Значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  будем искать по формуле(3)

$$\Delta y_k = (y_k + x_k)h \text{ или}$$

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h$$

Таким образом, получаем:

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1,$$

$$y_2 = 1,1 + (1,1 + 0,1) \cdot 0,1 = 1,21$$

В процессе решения составляем таблицу:

$x_k$	$y_k$	$y_k + x_k$	$\Delta y_k = (y_k + x_k) \cdot h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0,1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0,2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0,3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0,4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0,5$	1,7164	2,2164	0,2216
$x_6 = 0,6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0,7$	2,1918	2,8918	0,2812
$x_8 = 0,8$	2,4730	3,2730	0,3273
$x_9 = 0,9$	2,8003	3,7003	0,3700
$x_{10} = 1,0$	3,1703		

Мы нашли приближенное значение  $y|_{x=1} = 3,1703$ . точное решение данного уравнения. Удовлетворяющее указанному начальному

условиям, будет  $y = 2^{\ell^x} - x - 1$ . Следовательно,  $y|_{x=1} = 2(\ell - 1) = 3,4365$  Абсолютная погрешность; 0,2662; относительная погрешность 0,2662

$$\frac{0,2662}{3,4365} = 0,077 \approx 8\%$$

## ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

### Вариант № 1

1. Найдите производную функций:  $y = x^2 - 7x + 3$

2. Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной форме:

$$\frac{2(1 + i\sqrt{3})}{1 - i} - (1 + i\sqrt{3})$$

3. Найдите интегралы:

$$\text{a) } \int (x^4 - \frac{1}{2x} - 4) dx \quad \text{b) } \int \frac{\cos x dx}{4 + 3\sin x} .$$

4. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 (5 - x - 3x^2) dx \quad \text{b) } \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 4}}$$

5. Решите дифференциальное уравнение и найдите частное

решение, удовлетворяющее данным условиям:

$$(1+x^2) y^3 dx - (y^2 - 1) x^3 dy = 0; y = 1 \text{ при } x = 1.$$

6. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «Крыша». Ребенок рассыпал буквы и собрал в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что у него снова получится слово «Крыша».

### Вариант № 2

1. Найдите производную функций:  $y = \sin 4x$ .

2. Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной форме:

$$\frac{(-2 + i)^2}{1 + 3i} - (0,1 - 0,3i).$$

3. Найдите интегралы:

$$\text{a) } \int (3 - \frac{1}{3\sin^2 x} + 2x) dx \quad \text{b) } \int \frac{xdx}{x^2 + 1} .$$

4. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{25 - 3x^2} \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos x dx$$

5. Решите дифференциальное уравнение и найдите частное решение, удовлетворяющее данным условиям:

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 y dx + \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} y dy = 0, \text{ если } y$$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ при } x = \frac{\pi}{4}.$$

6. Карточка «Лотерея» содержит 36 чисел. В тираже участвует 5 чисел. Какова вероятность того, что верно будет угадано 5 чисел.

### Вариант № 3

1. Вычислите определенный интеграл  $\int_0^2 (x^2 - 3x + 2) dx$ ;

2. Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной форме:

$$\frac{2(1 + i\sqrt{3})}{1 - i} - (1 + i\sqrt{3})$$

3. Найдите интегралы:

$$\text{a) } \int (3x^5 - \cos x - 1) dx, \quad \text{b) } \int \cos 3x dx$$

4. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{a) } \int_{-2}^2 (1+x)^2 dx \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-5x^2}} dx.$$

5. Решите дифференциальное уравнение и найдите частное решение,

удовлетворяющее данным условиям:

$$y' \cdot \operatorname{tg} x - y = 1, \text{ если } y = -\frac{1}{2} \text{ при } x = \frac{\pi}{6}.$$

6. Имеется 100 деталей, из которых возможны 4% бракованных. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь – бракованная?

### Вариант № 4

1. Вычислите определенный интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ .

2. Выполните действия в алгебраической форме. Результат запишите в тригонометрической и показательной

$$\text{форме: } \frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i} - 2i^{19}$$

3. Найдите интегралы:

a)  $\int (x - \frac{1}{3(1-x^2)} + 2) dx$       b)  $\int x \cdot 2^{x^2} dx$

4. Вычислите определенные интегралы:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{8-7\sin x}} dx,$       \_\_\_\_\_

5. Решите дифференциальное уравнение и найдите частное решение, удовлетворяющее данным условиям:

$(xy^2 + x)dx + (x^2 y - y)dy = 0$ , если  $y = 1$  при  $x = 0$ .

6. В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. Формулы сокращенного умножения

1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3.  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4.  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5.  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6.  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
7.  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

### 2. Таблица значений тригонометрических функций

$\alpha$ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\alpha$ (deg)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin $\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos $\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan $\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot $\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

## Таблица производных основных элементарных функций

1.  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1};$
2.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
3.  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$
4.  $(e^x)' = e^x;$
5.  $(a^x)' = a^x \ln a;$
6.  $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
7.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$
8.  $(\sin x)' = \cos x;$
9.  $(\cos x)' = -\sin x;$
10.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
11.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
12.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
13.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
14.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
15.  $(\operatorname{ar cctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$

## 5. Табличные интегралы

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$4. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$11. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a} + C$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

### 1. Основные источники:

- 1.1 Богомолов Н.В. Математика: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Математика : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 396 с. — Режим доступа: - URL: <https://www.biblio-online.ru/book/F7C570BC-85B6-4E2D-9B5A-4CB297E61C8E>
- 1.2 Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 285 с. — Режим доступа: - URL: <https://www.biblio-online.ru/book/B2077BBB-EF95-4E5F-AFE1-9AAB6EB69A17>

### 2. Дополнительные источники:

2.1 Дорофеева, А. В. Математика. Сборник задач : учебно-практическое пособие для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — 2-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08796-3. — URL : <https://urait.ru/bcode/449051>

2.2 Дегтярева, О.М. Краткий теоретический курс по математике для бакалавров и специалистов: учебное пособие / О.М. Дегтярева, Г.А. Никонова; Министерство образования и науки России, ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 136 с.: ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1523-5; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=427858>

2.3 Зализняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике: учебное пособие / В.Е. Зализняк, Г.И. Щепановская; Министерство образования и науки РФ, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. - 174 с.: табл. - ISBN 978-5-7638-2498-8; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229271>

### 3. Интернет-ресурсы:

- 3.1 ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: <http://biblioclub.ru/>
- 3.2 Электронная библиотечная система «Лань»: <http://e.lanbook.com/>
- 3.3 Сайт: [http:// shool-collection.edu.ru](http://shool-collection.edu.ru)
- 3.4 «Квант». Форма доступа: [www.kvant.mirror1.mccme.ru](http://www.kvant.mirror1.mccme.ru)