ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта -
филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»
(УУКЖТ ИрГУПС)

Н.В.Дубович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению контрольной работы

дисциплины ЕН.01 Математика

для специальности
27.02.03 Автоматика и телемеханика на транспорте (железнодорожном транспорте)

Базовая подготовка

среднего профессионального образования

Заочная форма обучения на базе среднего общего образования

Улан-Удэ - 2022

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Д-796

Дубович Н.В.

Д-796 **ЕН.01 Математика**: Методические указания по выполнению контрольной работы для обучающихся среднего профессионального образования заочной формы обучения специальности 23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог (вагоны) / Н.В.Дубович; Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта ИрГУПС. - Улан-Удэ: Сектор информационного обеспечения учебного процесса УУКЖТ ИрГУПС, 2022. – 37с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплине «Математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании Методического совета колледжа протокол № 5 от 19.04.2022

СОДЕРЖАНИЕ

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплине «Прикладная математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту заочной формы обучения самостоятельно справиться с выполнением контрольной работы, научиться решать задачи по всем разделам курса по данным дисциплинам.

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради школьного формата.
2. На обложке тетради наклеивается информационный лист с указанием: шифра, специальности, фамилии, имени, отчества студента, предмет и номер работы.
3. Работа должна быть выполнена пастой одного цвета, аккуратно и разборчиво.
4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.
5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием.
6. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью в контрольную тетрадь.
7. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения. Перечислим важнейшие из этих требований:

- необходимо соблюдать абзацы, всякую новую мысль следует начинать с красной строки;
- важные формулы, равенства, определения нужно выделять в отдельные строки. Чтобы сделать их более обозримыми;
- при описании решения задачи краткая запись условия отделяется от решения и в конце решения ставится ответ;
- серьезное внимание следует уделять правильному написанию сокращенных единиц величин;
- необходимо правильно употреблять математические символы.

8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

9. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

10. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались. Проставить дату выполнения работы и подпись.

11. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то студент должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.

12. Контрольная работа должна быть выполнена в срок (в соответствии с учебным планом).

13. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается

и возвращается студенту без оценки.

14. Студент, не имеющий зачета по контрольной работе, к экзамену не допускается.

15. Во время экзамена зачтенные контрольные работы представляются преподавателю вместе с данными методическими указаниями.

16. Контрольная работа имеет 4 варианта. Вариант работы выбирается преподавателем

Теоретический материал

Раздел 1. Линейная алгебра

Комплексные числа

1. Комплексные числа и действия над ними.

Решение многих задач сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому исследование алгебраических уравнений является одним из важнейших вопросов математики.

Действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое алгебраическое уравнение. Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел до множества, такого, чтобы в этом множестве уравнение вида $x^2 + a^2 = 0$ имели решения.

Корень уравнения $x^2 + 1 = 0$ или $x^2 = -1$ называется *мнимой единицей* и обозначается i.

Число вида $z = a + bi$, где а и в – любые действительные числа, а i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется ***комплексным числом***.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа *вида* $z = a + bi$, а число bi – *мнимой частью.*

Два комплексных числа $z= a_1+ i\, b_1$ и $z= a_2+ i\, b_2$ считаются **равными**, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1i = b_2i$

Два комплексных числа называют *сопряженными,* если они отличаются друг от друга только знаком перед мнимой частью. Сопряженные комплексные числа обозначают: z и $\bar{z}$. Например, $z_1 =1+ 2i$ и $\bar{z}_1 =1- 2i$;

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Пусть даны комплексные числа: $z_1 = a + bi$

и $z_2 = c + di$. 1. Сложение $z_1 + z_2 = (a + c) + (b$

$+ d)i$.

2. Вычитание $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

3. Умножение

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

4. Возведение комплексного числа в степень производится по формулам возведения двучлена в соответствующую степень, но при этом надо учитывать, что $i^1 = i$, $i^{4n+1} = i^1$, $i^2 = -1$, $i^{4n+2} = i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^{4n+3} = i^2 = -i$, $i^4 = 1$, $i^{4n} = 1$

5. При делении двух комплексных чисел в алгебраической форме, необходимо умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример 1.

1. $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = (2 + 5) + (3 - 7)i = 7 - 4i$;

2. $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = (2 - 5) + (3 - (-7))i = -3 + 10i$;

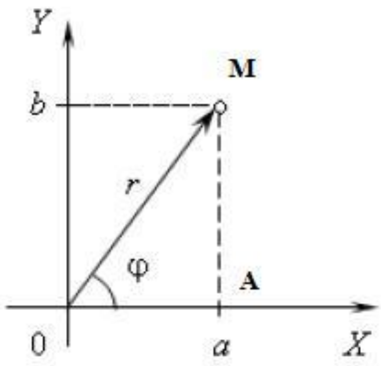
3. $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i$;

4. $(2 + 3i)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$;

$(3 + 5i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9i^2 + 27i^3$, так как $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, то получим $(3 + 5i)^3 = 125 + 225i - 135 - 27i = -10 + 198i$

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Любое комплексное число z = $a + bi$ можно изобразить на комплексной плоскости точкой Z с координатами *(a; b)*. *Модулем комплексного числа* называется длина вектора *OM*, изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Пусть дано комплексное число $z = a + bi$, выразим действительные числа a и b через модуль r и аргумент φ числа z следующим образом: a = r cosφ, b = r sinφ. Таким образом, комплексное число можно записать в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r-модуль комплексного числа, а φ – один из его аргументов. Представление комплексного числа в указанном виде называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Итак, существует три формы записи комплексного числа: $z = a + bi$ - алгебраическая форма;$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма;

$z = re^{i\varphi}$ - показательная форма.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной:

1. Найти модуль r комплексного числа находим по формуле: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Изобразить комплексное число на комплексной плоскости и определить четверть, в которой находится точка Z.

3. В зависимости от четверти, найти аргумент φ комплексного числа

4. Записать число в тригонометрической форме, подставив все найденные значения в формулу: $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, в показательной - $z = re^{i\varphi}$.

Пример . Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$.

Решение:

1) находим модуль комплексного числа:

$$a = 3;\ b = \sqrt{3}$$

$$|z| = r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}.$$

2) находим главное значение аргумента комплексного числа z: так как вектор, изображающий число z лежит в I четверти и

$$tg(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \text{то}\ \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

3) находим тригонометрическую форму: $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, находим показательную форму: $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Свойства определителей и их вычисление

Содержание материала: *определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.*

1.*Матрицей* называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента a_{ij}, первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j - номер столбца.

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется *прямоугольной*. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Если число строк равно числу столбцов (m = n), то матрица называется *квадратной*. Например, квадратными являются матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, в последнем примере порядок матрицы А равен 2, а порядок матрицы В равен 3.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны. Так, матрицы

А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и В = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ равны, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{23}$.

Равные матрицы обязательно либо имеют одно и то же строение: обе они прямоугольные типа того $m \times n$, либо квадратные одного и же порядка n.

Линейные операции над матрицами

Суммой матриц A и B называют такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа $m \times n$, или квадратные порядка n.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Тогда сумма матриц C = A+B имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Сложить матрицы A и B, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) Здесь A и B - квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Здесь A и B - прямоугольные матрицы типа 2×3. Складываем их соответствующие элементы: $C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

в) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как A есть матрица типа 3×2, а B - матрица типа 2×3; можно складывать только прямоугольные матрицы одного типа.

ким образом, сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяется переместительный закон сложения: A+B=B+A.

Произведением матрицы А на число k называется такая матрица kA, каждый элемент которой равен ka_{ij}, т. е. если A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то кА = $\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример 2. Умножить матрицу A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число k = 3.

Решение: Умножая каждый элемент матрицы А на 3, получим:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, тогда ***произведением*** этих матриц называется матрица C = AB = $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$. Чтобы найти элемент c_{11} первой строки и первого столбца матрицы С, нужно каждый элемент первой строки матрицы А (т. е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы В (т.е. b_{11} и b_{12}) и полученные произведения сложить; чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы С, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить; аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22} .

Пример 3. Найти произведение матриц А и В, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ & 6 & 11 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц, при чем справедливы правила:

1) умножение матрицы А на матрицу В имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, т. е. $AB \neq BA$.

2. Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя переменными x, y, z:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 ; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 ; \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 . \end{cases}$$

Определителем третьего порядка называется число, вычисляемое по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3$$

Правая часть состоит из алгебраической суммы шести членов, из которых три взяты со знаком «плюс», а три со знаком «минус». Со знаком «плюс» входят произведения элементов, лежащих по *главной диагонали,* а также произведения элементов, лежащих на параллелях к этой диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя, а со знаком «минус» –

произведения элементов побочной диагонали, а также произведения элементов, лежащих на параллелях к *побочной диагонали*, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя. Это правило называют ***правилом треугольника***.

Пример 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 10 - 0 + 1 + 24 = 53$.

Алгоритм ршения систем трех уравнений с тремя неизвестными методом Крамера:

1. Вычислить главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

2. Вычислить определитель $\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

3. Вычислить определитель $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};$

4. Вычислить определитель $\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix};$

5. В зависимости от полученных значений определить решение системы исходя из трех возможных случаев:

- если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$;
- если $\Delta = 0$, а Δx, Δy, Δz одновременно не равны нулю (т.е. $\Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 z > 0$), то система не имеет решений;

• если $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,$, то система имеет множество решений.

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14, \\ 3x - y + 2x = 5, \\ x + 2y - z = 7. \end{cases}$

Решение.

Вычислим главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16$.

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Вычислим теперь Δx , Δy , Δz :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 32\ ;\quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 48\ ;\quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 16\ .$$

Подставив найденные определители в формулы Крамера, получим:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2\ ; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3\ ; z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1\ .$$

Ответ: (2; 3; 1).

Раздел 2. Математический анализ

Дифференциальное и интегральное исчисление

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Пусть функция у = $f(x)$ определена на некотором промежутке. Возьмем из этого промежутка фиксированное значение аргумента x и придадим ему приращение Δx так, чтобы новое значение аргумента $x + \Delta x$ принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции $f(x)$ заменится новым значением $f(x) + \Delta y = f(x+\Delta x)$, т.е.функция получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Предел отношения приращения функции Δу к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю называется *производной функции* у = $f(x)$, *т.е*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если функция *f(x) имеет производную в точке x,* то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Производная сложной функции

Сложная функция – это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций, а не какую-то ее особенную сложность. Например, функция y = sin 3x является сложной. Если обозначить 3x = u, то получим sin u, где u – промежуточная функция. В сложную функцию может входить не одна, а несколько промежуточных функций. Например, для функции $y = \cos^2 2x$ промежуточными функциями служат u = cos v и v = 2x..

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\mathbf{y'(x) = y'(u)\cdot u'(x).}$$

Примеры.

1. $\mathbf{y = (x^2 + 3x)^5}$

Решение. Полагая $u = x^2 + 3x$, получим $y = u^5$. По формуле (10) находим $y' = 5(u)^4 (u)' = 5(x^2 +3x)^4 (x^2 +3x)' = 5(x^2 +3x)^4(2x+3)$.

Такая подробная запись производится только в процессе освоения техники дифференцирования. При навыке промежуточные вычисления производятся в уме.

Ответ: $y' = 5(x^2 +3x)^4(2x+3)$.

2. y = sin 3x

Решение. Полагая u =3x , получим y = sin u. По формуле (13)

$y' = \cos u\,(u)' = \cos 3x\cdot(3x)' = 3\cos 3x$.

Ответ: $y' = 3\cos 3x$.

3. y = ln cosx

Решение. Полагая cos x = u; получим y = ln u; По формуле (8)

$y' = (\ln u)' \cdot = \frac{1}{u}\cdot u'$

$$y' = \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx.$$

Ответ: $y' = -tgx$.

4. $\mathbf{y = 2^{\ln x}}$

Решение. Полагая $\ln x = u$, получим $y = 2^u$. По формуле (12). $y' = (2^u)' \cdot = 2^u \ln 2 \cdot u'$

$$y' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x)' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x};$$

Неопределенный интеграл

1. Основные формулы интегрирования

Функция F(x) называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна *f(x)*:

$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx,\ a \le x \le b.$

Отыскание первообразной функции по заданной ее производной *f(x)* или по дифференциалу *f(x)dx* есть действие, обратное дифференцированию, - интегрирование.

Совокупность первообразных для функции *f(x)* или для дифференциала *f(x)dx* называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $d(F(x) + C) = f(x)dx$.

Здесь *f(x)* подынтегральная функция; *f(x)dx* – подынтегральное выражение; С – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1.Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$\int dF(x) = F(x) + C.$

2.Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$d\int f(x)dx = f(x)dx,\ (\int f(x)dx)' = f(x).$

3.Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

5.Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов (смотри приложение 5) . Здесь могут представиться следующие случаи:

1)данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;2)данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3)данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример.

Найти следующие интегралы:

1. $\int 5dx$; 2. $\int 4(x^2 - x + 3)dx$; 3. $\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx$; 4. $\int \frac{dx}{x^4}$.

1. На основании свойства 4 постоянный множитель 5 выносим за знак интеграла и, используя формулу (1), получим

$\int 5dx = 5x + C.$

2.Используя свойство 3 и 4 и формулу (1) и (2), получим

$$\int 4(x^2 - x + 3)dx = 4\int x^2dx - 4\int xdx + 12\int dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C$$

3.Используя свойство 3 и 4 и формулу (1(и (2), получим

$$\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx = 4\int x^3dx - 15\int x^2dx + 14\int xdx - 3\int dx =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 15\frac{x^3}{3} + 14\frac{x^2}{2} - 3x + C = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + C.$$

4.Используя формулу (2), находим:

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Способ подстановки

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Этот метод называют также *методом замены переменной.* Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Он заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменой.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Примеры.

1.Найти $\int (2+x)^7\,dx$.

$$\int (2+x)^7\,dx = \int t^7\,dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{(2+x)^8}{8} + C.$$

$2 + x = t$

$(2+x)'dx = dt$

$dx = dt$

Ответ: $\frac{(2+x)^8}{8} + C$

—

Определенный интеграл

Определение. Если F(x) + C – *первообразная* функция для f(x) , то приращение F(b) –F(a) первообразных функций при изменении аргумента x от x = a до x = b называется *определенным интегралом.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

где a - нижний предел, а b – верхний предел определенного интеграла.

Для вычисления определенного интеграла *применяется формула*

Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Все методы интегрирования, используемые при нахождении неопределенных интегралов, применяются и при вычислении определенных интегралов. Числовое значение определенного интеграла зависит от вида функции, стоящей под знаком интеграла, и от значений верхнего и нижнего пределов и не зависит от обозначения переменной.

1.Вычисление определенных интегралов по готовым формулам:

1. $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}.$

2. $\int_{-1}^{2}(x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2 + 2\right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)\right] = 9.$

Решить самостоятельно:

1. $\int_1^2 x^3 dx;$

2. $\int_{-2}^{3}(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)dx$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$

1. $\int_1^3 x^4 dx$

2. $\int_{-1}^{0}(x^3 + 2x)dx$

3. $\int_2^3 \frac{dx}{x-1}$

Приложение производной функции и определенного интеграла к решению различных прикладных задач

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается *теорема Вейерштрасса,* утверждающая, что *непрерывная на отрезке* [a;b]*функция* f *принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т.е.* существуют точки отрезка [a;b], в которых f принимает наибольшее и наименьшее на [a;b] значения.

Для случая, когда функция f не только непрерывна на отрезке [a;b], но имеет на этом отрезке лишь конечное число критических точек, укажем *правило отыскания наибольшего и наименьшего значений* f.

Предположим сначала, что f не имеет на отрезке [a;b] критических точек, тогда f возрастает или убывает на этом отрезке, и, значит, наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [a;b] – это значения в концах a и b.

Пусть теперь функция f имеет на отрезке [a;b] конечное число критических точек. Эти точки разбивают отрезок [a;b] на конечно число отрезков. Внутри которых критических точек нет. Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции f на таких отрезках принимаются в их концах, т.е. в критических точках функции или в точках a и b.

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Схема применимая к решению разнообразных прикладных задач:

1) задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр *x,* через который интересующую нас величину выражают как функцию *f(x);*
2) средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;
3) выясняется, какой практический смысл (в терминах

первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Вообще решение практических задач средствами математики, как правило, содержит три основных этапа: 1) формализацию (перевод исходной задачи на язык математики); 2) решение полученной математической задачи и 3) интерпретацию найденного решения («перевод» его с языка математики в терминах первоначальной задачи).

Пример **1.** Каковы должны быть размеры прямоугольной комнаты площадью 25м^2, чтобы периметр ее был наименьшим?

Решение. Примем длину комнаты равной *x(м),* тогда ширина равна $\frac{25}{x}$, а периметр

$$y = 2\left(x + \frac{25}{x}\right).$$

Периметр y есть функция длины x, определенная для всех положительных значений x. Определим интервалы ее возрастания и убывания.

Находим производную: $y' = \frac{2(x-5)(x+5)}{x^2}$. Так как знаменатель больше нуля и длина x положительна, то знак производной определяется знаком разности (x-5). Таким образом, периметр прямоугольника имеет наименьшее значение (минимум), если длина прямоугольника 5м и ширина $\frac{25}{5} = 5$ м, т.е. когда комната имеет квадратную форму.

Ответ: Р= 20м

Пример 2. Из листа железа размером 1,5 ×1,5м^2 вырезают по углам квадраты. Чтобы при сметании получить емкость. Какой длины должны быть стороны вырезанных квадратов, чтобы получить емкость с наибольшим объемом?

Решение **.**Обозначим сторону вырезанного квадрата через *x*, тогда сторона основания емкости будет равна 1,5 – 2x, объем емкости

$$V = S_{осн} \cdot H = (1{,}5 - 2x)^2 \cdot x = 2{,}25x - 6x^2 + 4x^3.$$

Найдем первую производную $V' = 12x^2 - 12x + 2{,}25$.

Найдем точки экстремумов $V' = 0$; $12x^2 - 12x + 2{,}25 = 0$;

x = 0,25; x = 0,75.Найдем вторую производную $V^{//} = 24x - 12$; $V^{//}(0,25) < 0$, $V^{//}(0,75) > 0$.

При x = 0,25 имеем максимум, следовательно сторона вырезанного квадрата равна 0,25м.

Ответ: сторона вырезанного квадрата равна 0.25.

Раздел 3   Основные численные методы

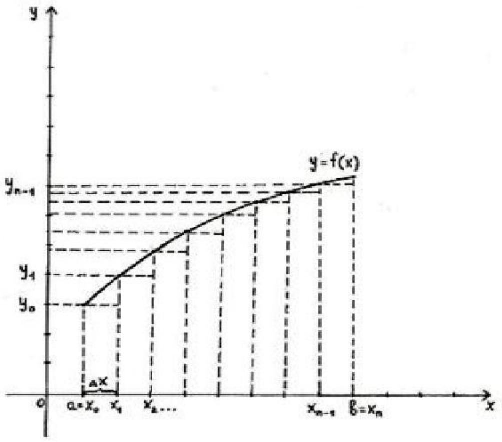
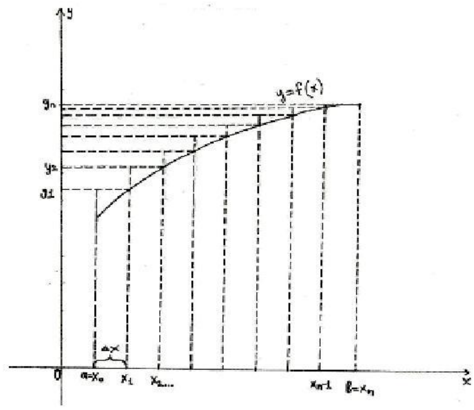
Численное интегрирование

Приближенное вычисление определенных интегралов

Часто приходится вычислять определённые интегралы, для которых невозможно найти первообразную. В этом случае применяют приближённые методы вычисления. Иногда приближённый метод применяют и для "берущихся" интегралов, если вычисление по формуле Ньютона-Лейбница не рационально. Идея приближённого вычисления интеграла заключается в том, что кривая $y = f(x)$ заменяется новой, достаточно "близкой" к ней кривой. В зависимости от выбора новой кривой можно использовать ту или иную приближённую формулу интегрирования. Рассмотрим три приближенных метода: метод прямоугольников, метод трапеций, метод парабол (метод Симпсона).

Метод прямоугольников

Геометрически идея способа вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников состоит в том, что площадь криволинейной трапеции ABCD заменяется суммой площадей прямоугольников, одна сторона которых равна $\frac{b-a}{n}$, а другая - $y = f(x_n)$. Если суммировать площади прямоугольников, которые показывают площадь криволинейной трапеции с недостатком и избытком, то получим формулы:

с недостатком:	*с избытком:*
	
$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$	$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_1 + ... + y_n)$

Значения y_0, y_1,..., y_n находят из равенств $y_k = f(a + k\Delta x)$, $k = 0, 1....., n$. С увеличением n результат становится более точным.

Итак, чтобы найти приближённое значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формуле прямоугольников, необходимо:

- разделить отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0 = a, x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n = b$;
- вычислить значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках деления, т.е. найти $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(x_n)$;
- воспользоваться одной из приближённых формул.

Для того, чтобы найти погрешность вычислений, надо воспользоваться формулами:

$$\Delta = |A_{точн} - A_{прибл}|$$

$$\delta = \frac{\Delta}{\ } \cdot 100\%$$

$$\overline{|A_{точн}|}$$

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_0 \cos x dx$.

Решение: Разделим промежуток интегрирования на 5 частей. Тогда $n = 5$; $b - a = \frac{\pi}{4}$; $\Delta x = \frac{b-a}{5} = \frac{\pi}{20} \approx 0{,}1571$. Найдем значения подынтегральной функции (с точностью до 4-х знаков после запятой):

$$y_0 = \cos 0^0 = 1{,}0000 \ ;$$

$$y_1 = \cos\left(\frac{\pi}{20}\right) = \cos 9^0 = 0{,}9877 \ ; \quad y_2 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos 18^0 = 0{,}9511;$$

$$y_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{20}\right) = \cos 27^0 = 0{,}8910 \ ; \quad y_4 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^0 = 0{,}8090 \ ;$$

$$y_5 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}7071 \ .$$

Тогда, по формуле прямоугольников (с недостатком):

$$A_{прибл} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \approx 0{,}1571 \cdot (0{,}9877 + 0{,}9511 + 0{,}8910 + 0{,}8090 + 0{,}7071) = 0{,}7282$$

С другой стороны, по формуле Ньютона Лейбница:

$$A_{точн} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

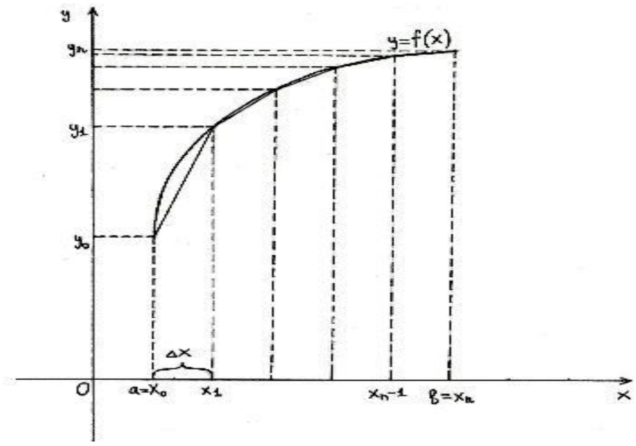
Найдем относительную погрешность вычисления по формуле прямоугольников:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A_{точн}|} \cdot 100\% = \frac{\left|0{,}6827 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 100\% = 3{,}45\%$$

Метод трапеций

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+....+y_{n-1}\right)$$



Пример 2. Вычислить по формуле трапеций $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$, при $n=5$.

Решение: Промежуток интегрирования разделен на 5 частей, тогда $\Delta x=\frac{b-a}{5}=1$ и $x_0=0$; $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=4$; $x_5=5$. Найдем значения подынтегральной функции (с точностью до 3-х знаков после запятой): $y_0=\frac{1}{\sqrt{4}}=0{,}5$; $y_1=\frac{1}{\sqrt{1+4}}\approx 0{,}447$; $y_2=\frac{1}{\sqrt{2+4}}\approx 0{,}409$; $y_3=\frac{1}{\sqrt{3+4}}\approx 0{,}377$; $y_4=\frac{1}{\sqrt{4+4}}\approx 0{,}353$; $y_5=\frac{1}{\sqrt{5+4}}=\frac{1}{3}$. Тогда по формуле трапеций, получим:

$$A_{прибл}=\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}\approx 1\cdot(0{,}416+0{,}447+0{,}409+0{,}377+0{,}353)=2{,}002$$

С другой стороны, по формуле Ньютона Лейбница:

$$A_{точн}=\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}=(2\sqrt{x+4})\Big|_0^5=6-4=2$$

Найдем относительную погрешность вычисления по формуле трапеций:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A_{точн}|}\cdot 100\% = \frac{|2-2{,}002|}{2}\cdot 100\% = 0{,}2\%$$

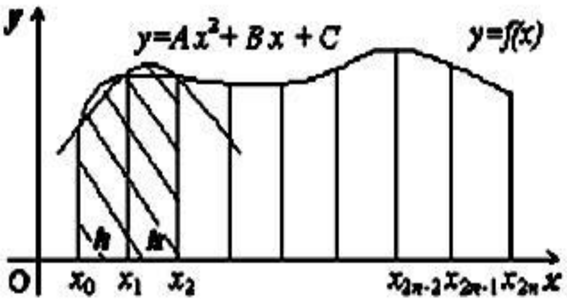
.

Метод Симпсона

Суть метода заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающие элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси Оу. Тогда криволинейную трапецию заменяют не суммой площадей прямолинейных фигур, как в предыдущих методах, а суммой площадей криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}))$$

где n - четное число.



Пример 3. Вычислить по формуле Симпсона $\int_1^4 x^2\,dx$.

Решение: Разделим промежуток интегрирования на 10 равных частей. Тогда $\frac{b-a}{3n} = \frac{3}{30} = 0{,}1$. Подставляя в подынтегральную функцию $y = x^2$ значения аргумента: $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}3$; $x_2 = 1{,}6$, …. , $x_{10} = 4$, найдем соответствующие значения ординат $y_0 = 1$, $y_1 = 1{,}69$; $y_2 = 2{,}56$; $y_3 = 3{,}61$; $y_4 = 4{,}84$; $y_5 = 6{,}25$; $y_6 = 7{,}84$; $y_7 = 9{,}61$; $y_8 = 11{,}56$; $y_9 = 13{,}69$; $y_{10} = 16$. Тогда, по формуле Симпсона получим:

$$A_{прибл} = \int_1^4 x^2\,dx \approx 0{,}1\cdot((1+16) + 2(2{,}56 + 4{,}84 + 7{,}84 + 11{,}56) +$$
$$+ 4(1{,}69 + 3{,}61 + 6{,}25 + 9{,}61 + 13{,}69)) = 21.$$

Вычисление по формуле Ньютона Лейбница дает:

$$A_{точн} = \int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$$

Таким образом, при вычислении определенного интеграла по формуле Симпсона получено точное значение интеграла.

Тема 5.3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Содержание материала: *понятие о численном решении дифференциальных уравнений. Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение метода численного решения дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач.*

Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера

Рассмотрим метод Эйлера, применяемый при приближенном решении дифференциальных уравнений.

Найдем приближенно решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (1)

на отрезке $[x_0,b]$,удовлетворяющее начальному условию при $x = x_0$, $y = y_0$. Разделим отрезок $[x_0,b]$ точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ на n равных частей (здесь $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$). Обозначим $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, следовательно, $h = \frac{b - x_0}{n}$.

Пусть $y = \varphi(x)$ есть некоторое приближенное решение уравнения (1) и

$y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, …, $y_n = \varphi(x_n)$,

Обозначим $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, …, $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$.

В каждой из точек $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ в уравнении (1) производную заменим отношением конечных разностей:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \tag{2}$$

$$\Delta y = f(x,y)\Delta x \tag{3}$$

При $x = x_0$ будем иметь $\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0)$, $\Delta y_0 = f(x,y)\,\Delta x$ или $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$.

В этом равенстве x_0, y_0, h известны, следовательно, находим: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$.

При $x = x_0$ уравнение (3) примет вид $\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,h$ или $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)\,h$, $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,h$.

Здесь известными являются x_1, y_1, h, а y_2 определяется. Аналогично находим;

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,h.$$

……………………

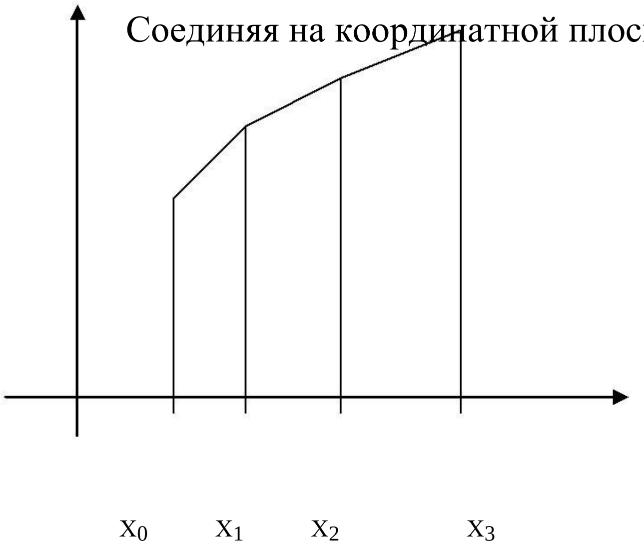
$$y_{к+1} = y_к + f(x_к, y_к)\,h.$$

……………………………

$$У_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,h.$$

Таким образом, приближенные значения решения в точках x_0, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найдены.

Соединяя на координатной плоскости точки (x_0,y_0), (x_1,y_1),…, (x_n,y_n), отрезками прямой, получим ломаную-приближенное изображение интегральной кривой (рис.1)



Эта ломаная называется ломаной Эйлера.

Пример1. Найти приближенное при x = 1 значение решения уравнения $y' = y + x$, удовлетворяющего начальному условию: при $x_0 = 0$ $y_0 = 1$.

Решение: Разделим отрезок [0,1] на 10 частей точками $x_0 = 0$; 0,1; 0,2; …, 1. Следовательно, h= 0,1.

Значения y_1., y_2, …, y_n будем искать по формуле(3)

$\Delta y_к = (y_k + x_k)h$ или

$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h$

Таким образом, получаем:

$У_1 = 1 + (1 + 0)\cdot 0{,}1 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$,

$У_2 = 1{,}1 + (1{,}1 + 0.1)\cdot 0{,}1 = 1{,}21$

……………………………………..

В процессе решения составляем таблицу:

$x_к$	$y_к$	$y_К$ + $x_К$	$\Delta y_К = (y_К + x_К)\cdot h$
x_0 =0	1,000	1,000	0,100
x_1 = 0,1	1,100	1,200	0,120
x_2 = 0,2	1,220	1,420	0,142
x_3 =0,3	1,362	1,620	0,162
x_4 = 0.4	1,524	1,924	0,1924
x_5 = 0,5	1,7164	2,2164	0.2216
x_6 = 0,6	1,9380	2,5380	0,2538
x_7 = 0,7	2,1918	2,8918	0,2812
x_8 = 0.8	2,4730	3,2730	0,3273
x_9 = 0,9	2.8003	3.7003	0,3700
x_{10} = 1.0	3.1703		

Мы нашли приближенное значение $y|_{x=1}$ = 3,1703. точное решение данного уравнения. Удовлетворяющее указанным начальным условиям, будет $y = 2\ell^x - x - 1$.

Следовательно, $y|_{x=1} = 2\ (\ell - 1) = 3{,}4365$ Абсолютная погрешность; 0,2662; относительная погрешность

$$\frac{0{,}2662}{3{,}4365} = 0{,}077 \approx 8\%$$

Задания к контрольной работе
Вариант № 1

1. Решить дифференциальное уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2}$ - $7\frac{dy}{dx} + 10y = 0$.

2. Число 43_{10} перевести в двоичную, восьмеричную системы счисления

3. Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя: $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2+3x-4}{16-x^2}$

4. Построить график функции $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ с помощью преобразований.

5. Изобразить геометрически область комплексных чисел, заданную неравенством: $|z+1-i| > 2$

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y=-6x$, $y=0$, $x=0$, $x=-8$.

Вариант № 2

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$
2. Используя формулу Маувра вычислить в показательной форме $\left(2+2\sqrt{3}\,i\right)^4$
3. Исследовать функцию $y = x^4 - 2x^3 + 1$ на выпуклость и точки перегиба с помощью производной.
4. . Составить уравнение касательной к графику функции $y = 5-4x+x^2$ в т. $x_0 = -1$.
5. Найти объем тела вращения вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y=3x$, $y=0$, $x=0$, $x=10$
6. Число 26_{10} перевести в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

Вариант № 3

1. Число $a=\dfrac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$ представить в алгебраической форме, изобразить геометрически.
2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{7x}\right)^{2x}$
3. Изобразить геометрически область комплексных чисел, заданную неравенством: $-2\le \operatorname{Im} z<1$
4. Найти асимптоты к графику функции $y=\dfrac{1}{x^2-9}$
5. Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$
6. Вычислить углы, образуемые при пересечении графиков двух функций: $y=x^2+5x-5$ и $y=3x-2$

Вариант № 4

1. Число 54_{10} перевести в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.
2. Найти точки разрыва функции $y=6^{\frac{5}{x-3}}-2$ и определить их характер.
3. Найти объем тела вращения вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y=-6x$, $y=0$, $x=0$, $x=-8$.
4. Построить график функции $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ с помощью преобразований.
5. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2+5x-6$ в т. $x_0=-3$.
6. Исследовать функцию $y=x^3-7x^2-5x+11$ на выпуклость и точки перегиба с помощью производной

ПРИЛОЖЕНИЯ

1.Формулы сокращенного умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2.Таблица значений тригонометрических функций

α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α (deg)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

3.Таблица арктангенсов

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(a^x)' = a^x \ln a$;
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
8. $(\sin x)' = \cos x$;
9. $(\cos x)' = -\sin x$;
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$;
15. $(\operatorname{ar\,cctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

5.Табличные интегралы

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
11. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Список использованной литературы:

1. Основные источники:
1.1 Богомолов Н.В. Математика: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Математика : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 396 с. — Режим доступа: - URL: https://www.biblio-online.ru/book/F7C570BC-85B6-4E2D-9B5A-4CB297E61C8E
1.2Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 285 с. — Режим доступа: - URL: https://www.biblio-online.ru/book/B2077BBB-EF95-4E5F-AFE1-9AAB6EB69A17

2. Дополнительные источники:

2.1 Дорофеева, А. В. Математика. Сборник задач : учебно-практическое пособие для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — 2-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08796-3. — URL : https://urait.ru/bcode/449051

2.2 Дегтярева, О.М. Краткий теоретический курс по математике для бакалавров и специалистов: учебное пособие / О.М. Дегтярева, Г.А. Никонова; Министерство образования и науки России, ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 136 с.: ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1523-5; То же [Электронный ресурс]. - URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=427858

2.3 070Зализняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике: учебное пособие / В.Е. Зализняк, Г.И. Щепановская; Министерство образования и науки РФ, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. - 174 с.: табл. - ISBN 978-5-7638-2498-8; То же [Электронный ресурс]. - URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229271

3. Интернет-ресурсы:

3.1ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: http://biblioclub.ru/
3.2Электронная библиотечная система «Лань»: http://e.lanbook.com/
3.3Сайт: http:// shool-collection.edu.ru
3.4«Квант». Форма доступа: www.kvant.mirror1.mccme.ru