ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта -
филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»
(УУКЖТ ИрГУПС)

Н.В.Дубович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению контрольной работы

дисциплины ЕН.01 Математика

для специальности

13.02.07 Электроснабжение (по отраслям)

Базовая подготовка

среднего профессионального образования

Заочная форма обучения на базе среднего общего образования

Улан-Удэ – 2021

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Д-796

Дубович Н.В.

Д-796 **ЕН.01 Математика**: Методические указания по выполнению контрольной работы для обучающихся среднего профессионального образования заочной формы обучения специальности 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям) / Н.В.Дубович; Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта ИрГУПС. - Улан-Удэ: Сектор информационного обеспечения учебного процесса УУКЖТ ИрГУПС, 2021. – 50с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплине «Математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Рассмотрено на заседании ЦМК протокол №6 от 07.06.21 и одобрено на заседании Методического совета колледжа протокол №7 от 07.06.21

СОДЕРЖАНИЕ

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплинам «Математика» и «Прикладная математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту заочной формы обучения самостоятельно справиться с выполнением контрольной работы, научиться решать задачи по всем разделам курса по данным дисциплинам.

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради школьного формата.
2. На обложке тетради наклеивается информационный лист с указанием: шифра, специальности, фамилии, имени, отчества студента, предмет и номер работы.
3. Работа должна быть выполнена пастой одного цвета, аккуратно и разборчиво.
4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.
5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием.
6. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью в контрольную тетрадь.
7. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения. Перечислим важнейшие из этих требований:

- необходимо соблюдать абзацы, всякую новую мысль следует начинать с красной строки;
- важные формулы, равенства, определения нужно выделять в отдельные строки. Чтобы сделать их более обозримыми;
- при описании решения задачи краткая запись условия отделяется от решения и в конце решения ставится ответ;
- серьезное внимание следует уделять правильному написанию сокращенных единиц величин;
- необходимо правильно употреблять математические символы.

8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

9. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

10. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались. Проставить дату выполнения работы и подпись.

11. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то студент должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.

12. Контрольная работа должна быть выполнена в срок (в соответствии с учебным планом).

13. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается студенту без оценки.

14. Студент, не имеющий зачета по контрольной работе, к экзамену не допускается.

15. Во время экзамена зачтенные контрольные работы представляются преподавателю вместе с данными методическими указаниями.

16. Контрольная работа имеет 4 варианта. Вариант работы выбирается преподавателем

Теоретический материал

Раздел 1. Линейная алгебра

Комплексные числа

1. Комплексные числа и действия над ними.

Решение многих задач сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому исследование алгебраических уравнений является одним из важнейших вопросов математики.

Действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое алгебраическое уравнение. Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел до множества, такого, чтобы в этом множестве уравнение вида $x^2 + a^2 = 0$ имели решения.

Корень уравнения $x^2 + 1 = 0$ или $x^2 = -1$ называется *мнимой единицей* и обозначается i.

Число вида $z = a + bi$, где а и в – любые действительные числа, а i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется ***комплексным числом***.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа *вида* $z = a + bi$, а число bi – *мнимой частью.*

Два комплексных числа $z= a_1+ i\,b_1$ и $z= a_2+ i\,b_2$ считаются **равными**, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1i = b_2i$

Два комплексных числа называют *сопряженными,* если они отличаются друг от друга только знаком перед мнимой частью. Сопряженные комплексные числа обозначают: z и $\bar{z}$. Например, $z_1 = 1+ 2i$ и $\bar{z}_1 = 1- 2i$;

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Пусть даны комплексные числа: $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$. 1. Сложение $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

2. Вычитание $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

3. Умножение

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

4. Возведение комплексного числа в степень производится по формулам возведения двучлена в соответствующую степень, но при этом надо учитывать, что $i^1 = i$, $i^{4n+1} = i^1$,
$i^2 = -1$, $i^{4n+2} = i^2 = -1$,
$i^3 = -i$, $i^{4n+3} = i^2 = -i$,
$i^4 = 1$, $i^{4n} = 1$

5. При делении двух комплексных чисел в алгебраической форме, необходимо умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример 1.

1. $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = (2 + 5) + (3 - 7)i = 7 - 4i$;

2. $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = (2 - 5) + (3 - (-7))i = -3 + 10i$;

3.

$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i$;

4. $(2 + 3i)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$ **;**

$(3 + 5i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9i^2 + 27i^3$**,** так как $i^2 = -1$, $i^3 = -i$,
то получим $(3 + 5i)^3 = 125 + 225i - 135 - 27i = -10 + 198i$

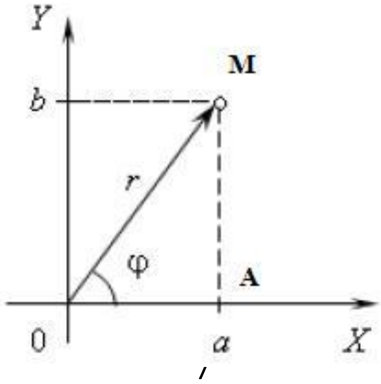
5. $\frac{2 + 3i}{5 - 7i} = \frac{(2 + 3i) \cdot (5 + 7i)}{(5 - 7i) \cdot (5 + 7i)} = \frac{10 + 14i + 15i + 21i^2}{5^2 - (7i)^2} = \frac{10 + 29i - 21}{25 - 49i^2} = \frac{-11 + 29i}{25 + 49} = \frac{-11 + 29i}{74}$

$-\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i$.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Любое комплексное число z = $a + bi$ можно изобразить на комплексной плоскости точкой Z с координатами *(a; b)*. *Модулем комплексного числа* называется длина вектора *OM*,

изображающего комплексное число на координатной (*комплексной*) плоскости: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Пусть дано комплексное число $z = a + bi$, выразим действительные числа *a и b* через модуль r и аргумент φ числа z следующим образом: *a* = r cosφ, *b* = r sinφ. Таким образом, комплексное число можно записать в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r-модуль комплексного числа, а φ – один из его аргументов. Представление комплексного числа в указанном виде называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Итак, существует три формы записи комплексного числа: $z = a + bi$ - алгебраическая форма; $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - тригонометрическая форма;

$z = re^{i\varphi}$ - показательная форма.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной:

1. Найти модуль r комплексного числа находим по формуле: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Изобразить комплексное число на комплексной плоскости и определить четверть, в которой находится точка Z.

3. В зависимости от четверти, найти аргумент φ комплексного числа

4. Записать число в тригонометрической форме, подставив все найденные значения в формулу: $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, в показательной - $z = re^{i\varphi}$.

Пример . Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число z = 3 + $\sqrt{3}$ i.

Решение:

1) находим модуль комплексного числа:

$$a = 3;\ b = \sqrt{3}$$

$$|\,z\,| = r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^{\,2}} = 2\sqrt{3}\,.$$

2) находим главное значение аргумента комплексного числа z: так как вектор, изображающий число z лежит в I четверти и

$$tg\,(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{\ },\ \text{то}\ \varphi = \frac{\pi}{\ }\ .$$

3) находим тригонометрическую форму: $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, находим показательную форму: $z = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Свойства определителей и их вычисление

Содержание материала: *определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.*

1.*Матрицей* называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента a_{ij} , первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j - номер столбца.

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется *прямоугольной*. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Если число строк равно числу столбцов (m = n), то матрица называется *квадратной*. Например, квадратными являются матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, в последнем примере порядок матрицы A равен 2, а порядок матрицы B равен 3.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны. Так, матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ равны, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{23}$.

Пример 1. Сложить матрицы A и B, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) Здесь A и B - квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Здесь A и B - прямоугольные матрицы типа 2×3. Складываем их соответствующие элементы: $C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

в) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как A есть матрица типа 3×2, а B - матрица типа 2×3; можно складывать только прямоугольные матрицы одного типа.

Таким образом, сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяется переместительный закон сложения: A+B=B+A.

Произведением матрицы A на число k называется такая матрица kA, каждый элемент которой равен ka_{ij}, т. е. если A =

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, то кA = $\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример 2. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число k = 3.

Решение: Умножая каждый элемент матрицы A на 3, получим:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, тогда ***произведением*** этих матриц называется матрица C = AB = $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$. Чтобы найти элемент c_{11} первой строки и первого столбца матрицы C, нужно каждый элемент первой строки матрицы A (т. е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (т.е. b_{11} и b_{12}) и полученные произведения сложить; чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы C, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить; аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22} .

Пример 3. Найти произведение матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ & 6 & 11 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц, при чем справедливы правила:

1) умножение матрицы А на матрицу В имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, т. е. АВ ≠ ВА.

2. Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя переменными x, y, z:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 ; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 ; \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 . \end{cases}$$

Определителем третьего порядка называется число, вычисляемое по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3$$

Правая часть состоит из алгебраической суммы шести членов, из которых три взяты со знаком «плюс», а три со знаком «минус». Со знаком «плюс» входят произведения элементов, лежащих по *главной диагонали,* а также произведения элементов, лежащих на параллелях к этой диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя, а со знаком «минус» – произведения элементов побочной диагонали, а также произведения элементов, лежащих на параллелях к *побочной диагонали*, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя. Это правило называют ***правилом треугольника***.

Пример 1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 10 - 0 + 1 + 24 = 53 .$

Алгоритм ршения систем трех уравнений с тремя неизвестными методом Крамера:

1. Вычислить главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

2. Вычислить определитель $\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

3. Вычислить определитель $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};$

4. Вычислить определитель $\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix};$

5. В зависимости от полученных значений определить решение системы исходя из трех возможных случаев:

- если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение: $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$;
- если $\Delta = 0$, а Δx, Δy, Δz одновременно не равны нулю (т.е. $\Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 z > 0$), то система не имеет решений;
- если $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, , то система имеет множество решений.

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14, \\ 3x - y + 2x = 5, \\ x + 2y - z = 7. \end{cases}$

Решение.

Вычислим главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16$.

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Вычислим теперь Δx , Δy , Δz :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 32 \text{ ; } \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 48 \text{ ; } \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 16 \text{ .}$$

Подставив найденные определители в формулы Крамера, получим:

$$x = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2 \text{ ;} y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3 \text{ ;} z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1 \text{ .}$$

Ответ: (2; 3; 1).

Раздел 2. Математический анализ

Дифференциальное и интегральное исчисление

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Пусть функция у = *f(x)* определена на некотором промежутке. Возьмем из этого промежутка фиксированное значение аргумента *x* и придадим ему приращение Δх так, чтобы новое значение аргумента *x* + Δ*x* принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции *f(x)* заменится новым значением *f(x)* + Δу = *f(x*+Δ*x),* т.е.функция получит приращение Δу = *f(x*+Δ*x)* - *f(x).*

Предел отношения приращения функции Δу к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремиться к нулю называется *производной функции* у = *f(x), т.е*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если функция *f(x) имеет производную в точке x,* то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Производная сложной функции

Сложная функция – это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций, а не какую-то ее особенную сложность. Например, функция $y = \sin 3x$ является сложной. Если обозначить $3x = u$, то получим $\sin u$, где u – промежуточная функция. В сложную функцию может входить не одна, а несколько промежуточных функций. Например, для функции $y = \cos^2 2x$ промежуточными функциями служат $u = \cos v$ и $v = 2x$..

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной: $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$.

Примеры.

1. $y = (x^2 + 3x)^5$

Решение. Полагая $u = x^2 + 3x$, получим $y = u^5$. По формуле (10) находим $y' = 5(u)^4 (u)' = 5(x^2 + 3x)^4 (x^2 + 3x)' = 5(x^2 + 3x)^4(2x+3)$.

Такая подробная запись производится только в процессе освоения техники дифференцирования. При навыке промежуточные вычисления производятся в уме.

Ответ: $y' = 5(x^2 + 3x)^4(2x+3)$.

2. $y = \sin 3x$

Решение. Полагая $u = 3x$, получим $y = \sin u$. По формуле (13)

$y' = \cos u\,(u)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x$.

Ответ: $y' = 3\cos 3x$.

3. $y = \ln \cos x$

Решение. Полагая $\cos x = u$; получим $y = \ln u$; По формуле (8)

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx.$$

Ответ: $y' = -tgx$.

4. $y = 2^{\ln x}$

Решение. Полагая $\ln x = u$, получим $y = 2^u$. По формуле (12). $y' = (2^u)' = 2^u \ln 2 \cdot u'$

$$y' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x)' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x};$$

Неопределенный интеграл

1. Основные формулы интегрирования

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:

$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx,\ a \le x \le b.$

Отыскание первообразной функции по заданной ее производной *f(x)* или по дифференциалу *f(x)dx* есть действие, обратное дифференцированию, - интегрирование.

Совокупность первообразных для функции *f(x)* или для дифференциала *f(x)dx* называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $d(F(x) + C) = f(x)dx$.

Здесь *f(x)* подынтегральная функция; *f(x)dx* – подынтегральное выражение; С – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1.Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$\int dF(x) = F(x) + C.$

2.Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$d\int f(x)dx = f(x)dx,\ (\int f(x)dx)' = f(x).$

3.Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

4.Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

5.Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов (смотри приложение 5) . Здесь могут представиться следующие случаи:

1)данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2)данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3)данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример.

Найти следующие интегралы:

1. $\int 5dx$; 2. $\int 4(x^2 - x + 3)\mathrm{dx}$; 3. $\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx$; 4. $\int \frac{dx}{x^4}$.

1. На основании свойства 4 постоянный множитель 5 выносим за знак интеграла и, используя формулу (1), получим

$$\int 5dx = 5x + C.$$

2.Используя свойство 3 и 4 и формулу (1) и (2), получим

$$\int 4(x^2 - x + 3)dx = 4\int x^2dx - 4\int xdx + 12\int dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C$$

3.Используя свойство 3 и 4 и формулу (1(и (2), получим

$$\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx = 4\int x^3dx - 15\int x^2dx + 14\int xdx - 3\int dx =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 15\frac{x^3}{3} + 14\frac{x^2}{2} - 3x + C = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + C.$$

4.Используя формулу (2), находим:

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Способ подстановки

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Этот метод называют также *методом замены переменной.* Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Он заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Естественно возникает вопрос: как правильно выбрать подстановку? Это достигается практикой в интегрировании. Все же можно установить ряд общих правил и некоторые приемы для частных случаев интегрирования.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменой.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Примеры.

1.Найти $\int (2+x)^7\,dx$.

$$\int (2+x)^7\,dx = \int t^7\,dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{(2+x)^8}{8} + C.$$

2 + x = t

(2+x)′dx= dt

dx = dt

Ответ: $\frac{(2+x)^8}{8} + C$

Определенный интеграл

Определение. Если F(x) + C – *первообразная* функция для f(x), то приращение F(b) –F(a) первообразных функций при изменении аргумента x от x = a до x = b называется *определенным интегралом.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

где a - нижний предел, а b – верхний предел определенного интеграла.

Для вычисления определенного интеграла *применяется формула*
Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Все методы интегрирования, используемые при нахождении неопределенных интегралов, применяются и при вычислении определенных интегралов. Числовое значение определенного интеграла зависит от вида функции, стоящей под знаком интеграла, и от значений верхнего и нижнего пределов и не зависит от обозначения переменной.

1.Вычисление определенных интегралов по готовым формулам:

1. $\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}.$

2. $\int_{-1}^{2}(x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2 + 2\right] - \left[\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)\right] = 9.$

Приложение производной функции и определенного интеграла к решению различных прикладных задач

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается *теорема Вейерштрасса,* утверждающая, что *непрерывная на отрезке* [a;b]*функция* f *принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т.е.* существуют точки отрезка [a;b], в которых f принимает наибольшее и наименьшее на [a;b] значения.

Для случая, когда функция f не только непрерывна на отрезке [a;b], но имеет на этом отрезке лишь конечное число критических точек, укажем *правило отыскания наибольшего и наименьшего* *значений* f.

Предположим сначала, что f не имеет на отрезке [a;b] критических точек, тогда f возрастает или убывает на этом отрезке, и, значит, наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке [a;b] – это значения в концах a и b.

Пусть теперь функция f имеет на отрезке [a;b] конечное число критических точек. Эти точки разбивают отрезок [a;b] на конечно число отрезков. Внутри которых критических точек нет. Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции f на таких отрезках принимаются в их концах, т.е. в критических точках функции или в точках a и b.

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Схема применимая к решению разнообразных прикладных задач:

1) задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр *x,* через который интересующую нас величину выражают как функцию *f(x);*
2) средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;
3) выясняется, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Вообще решение практических задач средствами математики, как правило, содержит три основных этапа: 1) формализацию (перевод исходной задачи на язык математики); 2) решение полученной математической задачи и 3) интерпретацию найденного решения («перевод» его с языка математики в терминах первоначальной задачи).

***Пример* 1.** Каковы должны быть размеры прямоугольной комнаты площадью 25м^2, чтобы периметр ее был наименьшим?

Решение. Примем длину комнаты равной *x(м),* тогда ширина равна $\frac{25}{x}$, а периметр

$$y = 2\left(x + \frac{25}{x}\right).$$

$\left(\quad x \right)$

Периметр y есть функция длины x, определенная для всех положительных

значений x. Определим интервалы ее возрастания и убывания.

Находим производную: $y' = \frac{2(x-5)(x+5)}{x^2}$. Так как знаменатель больше нуля и длина x положительна, то знак производной определяется знаком разности (x-5). Таким образом, периметр прямоугольника имеет наименьшее значение (минимум), если длина прямоугольника

5м и ширина $\frac{25}{5} = 5$ м, т.е. когда комната имеет квадратную форму.

Ответ: Р= 20м

Пример 2. Из листа железа размером 1,5 ×1,5м^2 вырезают по углам квадраты. Чтобы при сметании получить емкость. Какой длины должны быть стороны вырезанных квадратов, чтобы получить емкость с наибольшим объемом?

Решение **.**Обозначим сторону вырезанного квадрата через x, тогда сторона основания емкости будет равна 1,5 – 2x, объем емкости

$$V = S_{осн} \cdot H = (1{,}5 - 2x)^2 \cdot x = 2{,}25x - 6x^2 + 4x^3.$$

Найдем первую производную $V' = 12x^2 - 12x + 2{,}25$.

Найдем точки экстремумов $V' = 0$; $12x^2 - 12x + 2{,}25 = 0$; $x = 0{,}25$; $x = 0{,}75$.

Найдем вторую производную $V'' = 24x - 12$; $V''(0{,}25) < 0$, $V''(0{,}75) > 0$.

При x = 0,25 имеем максимум, следовательно сторона вырезанного квадрата равна 0,25м.

Ответ: сторона вырезанного квадрата равна 0.25.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Понятие о дифференциальном уравнении

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную х , искомую функцию у и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x,y,y') = 0, \quad F(x,y,y'') = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или *интегралом*) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значенияхпроизвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Задача, нахождения частного решения , удовлетворяющих начальным условиям, называется задачей Коши.

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$.

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx ,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Решить уравнения:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$3dx - y^2 dy + xdx = 0;$$

Чтобы произвести разделение переменных, надо сгруппировать члены с dx и записать полученные функции в разных частях равенства:

$$y^2 dy = (3 + x)\,dx;$$

Получим уравнение с разделяющими переменными, интегрируем:

$\int y^2 dy = \int (3+x)dx$; $\quad \frac{y^3}{3} = 3x + \frac{x^2}{2} + C$; $\quad \frac{y^3}{3} - 3x - \frac{x^2}{2} = C$;

Общее решение данного уравнения.

Ответ: $\frac{y^3}{3} - 3x - \frac{x^2}{2} = C$;

2. Найти общее решение дифференциального уравнения: $1 + y - xy' = 0$:

Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$, получим $\quad 1 + y - x\frac{dy}{dx} = 0$:

Умножим все члены на dx $\quad dx + ydx - x\,dy = 0$;

Сгруппируем члены с dx . $\quad (1 + y)\,dx - x\,dy = 0$;

Запишем полученные функции в разных частях равенства:

$x\,dy = (1 + y)\,dx$; разделив переменные имеем: $\frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{x}$;

Интегрируем обе части полученного уравнения

$\int \frac{dy}{1+y} = \int \frac{dx}{x}$; $\quad \ln(1+y) = \ln x + \ln C$; $\ln(1+y) = \ln(xC)$;

$1 + y = x \cdot C$; $\quad y = x \cdot C - 1$; Общее решен ие уравнения.

Ответ: $y = x \cdot C - 1$.

3.Найти общее решение уравнения $x(1 + y^2)dy = ydy$.

Разделив переменные, имеем

$$xdx = \frac{ydy}{1+y^2}$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}; \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная С может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо С мы написали $\frac{1}{2}\ln C$.

Потенцируя последнее равенство, получим

$$x^2 = \ln (C(1+y^2))$$

Это и есть общее решение данного уравнения.

Ответ: $x^2 = \ln (C(1+y^2))$

4. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$; y = 4 при x = 0.

Разделив переменные, имеем

$$(y-2)\,dy = (x-1)\,dx;$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int (y-2)dy = \int (x-1)dx; \quad \int ydy - \int 2dy = \int xdx - \int dx;$$

$$\frac{y^2}{2} - 2y = \frac{x^2}{2} - x + C;$$

Это общее решение данного уравнения.

Для нахождения значения произвольной постоянной С подставим значения

У = 4: х = 0; $\frac{4^2}{2} - 2\cdot 4 = \frac{0^2}{2} - 0 + C$; 8 – 8 = 0 – 0 + С; С = 0;

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $y^2 - 4y = x^2 - 2x$; $x^2 - y^2 + 4y - 2x = 0$.

Ответ: $x^2 - y^2 + 4y - 2x = 0$.

На основании решенных примеров очевиден алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

-Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.

-Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.

-Разделяют переменные.

-Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.

-Если заданы начальные условия, то находят частное решение. В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

2. **Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

1. дифференциальное уравнение (по определению) обязательно содержит производные или дифференциалы искомой функции;
2. уравнение второго порядка содержит производную, наивысший порядок которой равен 2;
3. это уравнение – линейное относительно искомой функции и ее производных, т.е. содержит их в первой степени;
4. это – уравнение с постоянными коэффициентами; значит, коэффициенты при функции и ее производных являются постоянными величинами.

Учитывая все это, можно сказать, что рассматриваемое уравнение содержит y, y', y'' в первой степени и коэффициенты при них – постоянные величины.

Коэффициенты при y'' всегда можно сделать равным единице, полученные при этом коэффициенты при y' и y обозначим через p и q. Тогда получим уравнение вида

$$y''+py'+qy=f(x). \qquad (1)$$

где p и q – постоянные величины, а $f(x)$- непрерывная функция x.

Если правая часть уравнения (1) равна нулю, т. е. $y''+py'+qy=0$, то оно называется уравнением без правой части или однородным уравнением.

Определение1. ***Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*** $\mathbf{y''+py'+qy=0}$***, где p и q – постоянные величины.***

Напомним, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Для того, чтобы найти общее решение уравнение $y'' + py' + qy = 0$, имеющее вид $y = C_1y_1 + C_2y_2$, нужно найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2.

Функция вида $y = e^{kx}$ является решением рассматриваемого уравнения тогда и только тогда, когда число k является корнем квадратного уравнения

$$k^2 + pk + q = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением.*

Решения уравнения в зависимости от значений корней k_1 и k_2 характеристического уравнения имеют следующий вид:

$y = C_1e^{k_1 x} + C_2e^{k_2 x}$, если k_1, k_2 – действительны и $k_1 \neq k_2$; $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}$, если $k_1 = k_2$;

$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$, если $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$.

Пример1. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + 4y = 0,\ y(\pi/4) = 1,\ y'(\pi/4) = -2.$$

Решение.

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$. Дискриминант уравнения $D = -16 < 0$. Следовательно, корни характеристического уравнения $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ и решения уравнения имеют вид $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

Воспользовавшись начальными условиями, значения постоянных C_1 и C_2 определим из системы уравнений

$$0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 = 1,$$

$$-2 \cdot 1 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot 0 = -2.$$

Имеем $C_1 = 1$, $C_2 = 1$.

Искомое решение $\mathbf{y = \cos 2x + \sin 2x}$**.**

Пример 2. Решите уравнение: $y'' - y' - 2y = 0$.

Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение $k^2 - k - 2 =$

0. Дискриминант уравнения D = 9.

Следовательно, корни характеристического уравнения k_1= -1, k_2 = 2 и решения уравнения имеют вид

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}.$$

Пример 3. Решите уравнение: $y'' - 10y' + 25y = 0$.
Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 10k + 25 = 0$. Дискриминант уравнения

D = 0. Следовательно, корни характеристического уравнения $k_1 = k_2 = 5$ и решения уравнения имеют вид $У = (C_1 + C_2x)\, e^{5x}$.

Ряды

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

где числа $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots, u_n,\ \ldots$ называемые *членами ряда*, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется *общим членом ряда*.

Суммы $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

……………………..

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ + a_n$

составленные из первых членов ряда, называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм

$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$. Если последовательность (S_n) сходится , т.е. имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то числовой ряд называется *сходящимся,*

а S – суммой ряда. В противном случае ряд называется *расходящимся.*

1.**Необходимый признак сходимости ряда.**

$n\to\infty$

Ряд $\sum\limits_{n \to 1} u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремиться к нулю;

$$\sum_{n\to 1}^{n\to\infty} u_n = 0 .$$

Если $\sum\limits_{n\to 1}^{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n \to 1}^{n\to\infty} u_n$ расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

1.Признак сравнения рядов с положительными членами.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

2. Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n\to 1}^{n\to\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots (u_n \quad 0)$$

Выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$

Признак Даламбера не дает ответа, если $l=1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Числовой ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ называется *знакопеременным,* если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$называется *знакочередующимся,* если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если члены знакочередующегося рада $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ монотонно убывают по абсолютной величине и общий член u_n

стремиться к нулю при $n \to \infty$ *, то ряд* $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ *сходится.*

Этот признак служит достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд

$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ расходится, то данный ряд называется *условно*

(неабсолютно) сходящимся. Заметим, что из расходимости ряда

$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$ в общем случае не следует расходимость ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$.

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного (и знакочередующегося) ряда используются те же признаки, что и для сходимости ряда с положительными членами.

5.Ряд Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье для функции *f(x)* в промежутке изменения аргумента

$-\pi \le x \le \pi$ называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

(1)

Или, короче

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ , \quad \textbf{(2)}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, b_1 , b_2 , ..., b_n коэффициенты ряда, называемые *коэффициентами Фурье*

Коэффициенты ряда Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Пример.

1. Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}+\ldots;$$

Решение.

Находим $\lim_{n\to\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}=0$. Необходимый признак сходимости ряда выполняется, но для решения вопроса о сходимости нужно применить один из достаточных признаков сходимости. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$ который сходится, так как $q=\frac{1}{2}<1$.

Сравнивая члены данного ряда, начиная со второго, с соответствующими членами геометрического ряда, получим неравенства

$$\frac{1}{3\cdot 2^2}<\frac{1}{2^2};\frac{1}{5\cdot 2^3}<\frac{1}{2^3};\ldots;\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}<\frac{1}{2^n};\ldots,$$

т.е. члены данного ряда, начиная со второго, соответственно меньше членов геометрического ряда, откуда следует, что данный ряд сходится.

2. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n}=\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\ldots+\frac{2n}{5^n}+\ldots;$$

Решение.

Подставив в общий член ряда $\frac{2n}{5^n}$ вместо n число n+1, получим

$\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}$.

Найдем предел отношения (n+1) -го члена к n - му члену при $n\to\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)}{5^{n+1}}:\frac{2n}{5^n}=\frac{n+1}{5n}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Раздел 3 Основы теории вероятностей и математической статистики

Основные понятия комбинаторики

Задачи, при решении которых приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и производить подсчет числа всех возможных таких комбинаций, называются *комбинаторными.* Этот раздел математики находит широкое практическое применение во многих вопросах естествознания и техники.

1. Перестановки

Комбинации из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются *перестановками.*

40

Перестановки обозначаются символом Pn , где n – число элементов,
входящих в каждую перестановку.

Число перестановок можно вычислить по формуле:

$P_n = n\cdot (n-1)\cdot (n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (1)

или с помощью факториала:

$P_n = n!$ (2)

2. Размещения

Комбинации из n элементов по m элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются *размещениями.*

Размещения обозначаются символом A_n^m, где n – число всех имеющихся элементов, m – число элементов в каждой комбинации. При этом полагают, что n ≥ m.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1) \quad (3)$$

Пример 1. Вычислить:

а) A_6^3; б) $\frac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5}$.

Решение. а) $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$

$$\frac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5} = \frac{15\cdot14\cdot13 + 15\cdot14\cdot13\cdot12}{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11} = \frac{15\cdot14\cdot13(1+12)}{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11} = \frac{13}{12\cdot11} = \frac{13}{132}.$$

б)

Пример 2. Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна из них не повторяется?

Решение.

Так как двузначные числа отличаются друг от друга или самими цифрами, или их порядком, то искомое количество равно числу размещений из пяти элементов по два: $A_5^2 = 5 \cdot 4$ =20. Итак, можно составить 20 различных двузначных чисел.

3. Сочетания

Не всегда нас интересует порядок, в котором располагаются элементы.

Сочетаниями называются все комбинации из n элементов по m, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом

(здесь n и m – натуральные числа, причем m ≤ n).

В общем случае число из n элементов по m равно числу размещений из n элементов по m, деленному на число перестановок из m элементов;

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}. \qquad (5)$$

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \qquad (6)$$

Пример 3. Вычислить: а) C_8^3; б) C_{10}^8 .

Решение.

а) Применяя формулу при n = 8, m = 3, находим $C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 7\cdot 8 = 56.$

б) $C_{10}^8 = \frac{10!}{(10-8)!\cdot 8!} = \frac{8!}{2!\cdot 8!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}.$

Задача 1.

Сколькими способами из группы, включающей 25 студентов, можно выбрать актив группы в составе старосты, зам. старосты, профорга?

Решение.

Состав активы группы является упорядоченным множеством из 25 элементов по три элемента. Значит, искомое число способов равно числу размещений из 25 элементов по три элемента в каждом:

$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$

или $A_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 23 \cdot 24 \cdot 25 = 13\,800$.

Ответ: 13 800 способами.

Задача 2. Сколькими способами можно рассадить 10 гостей по десяти местам за праздничным столом?

Решение.

Искомое число способов равно числу перестановок из десяти элементов:

$P_{10} = 10! = 3628800$.

Ответ: 3628800 способами.

Задача 3. Сколькими способами можно распределить 12 человек по бригадам, если в каждой бригаде по 6 человек?

Решение.

Состав каждой бригады является конечным множеством из 12

элементов по 6. Значит, искомое число способов равно числу сочетаний из 12 элементов по 6 в каждом:

$C_{12}^6 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 924$

Ответ: 924 способами.

Случайные события. Вероятность события

Теория вероятностей – это математическая наука, которая изучает закономерности в случайных событиях. К основным понятиям теории вероятностей относятся испытания и события.

Под *испытанием (опытом)* понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое – либо событие.

Например, бросание монеты – испытание; появление герба или цифры – событие.

Случайным событием называется событие, связанное с данным испытанием, которое при осуществлении испытания может произойти, а может и не произойти. Слово «случайное» для краткости часто опускают и говорят просто «событие». Например, выстрел по цели – это опыт, случайное событие в этом опыте – попадание в цель или промах.

Событие в данных условиях называется *достоверным,* если в результате опыта оно непременно должно произойти, и *невозможным,* если оно заведомо не произойдет.

Например, выпадение не более шести очков при бросании одной игральной кости – достоверное событие; выпадение десяти очков при бросании одной игральной кости – невозможное событие.

События называются *несовместными,* если никакие два из них не могут произойти одновременно. Например, попадание и промах при одном выстреле – это несовместные события.

ворят, что несколько событий в данном опыте образуют *полную систему* событий, если в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. Например, при бросании игральной кости события, состоящие в выпадении одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков, образуют полную систему событий.

События называются *равновозможными,* если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие. Например, при бросании монеты выпадение герба или числа – события равновозможные.

Каждое событие обладает какой-то степенью возможности. Числовая мера степени объективной возможности события – это вероятность события. Вероятность события А обозначается Р(А).
Пусть из системы n несовместных равновозможных исходов испытания m исходов благоприятствуют событию А, тогда *вероятность* события А равна отношению числа m исходов

испытания, благоприятствующих наступлению события А,

к общему числу n всех равновозможных несовместных исходов, т. е. $\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n}.$

Эта формула носит название *классического определения вероятности.*

Свойства вероятности:

1.*Вероятность любого события есть неотрицательное число, не превосходящее единицы* $0 \le P(A) \le 1$.

2.*Вероятность достоверного события равна единице, так как* *P(A)*= $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}} = 1$.

3.*Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку* *P(A)*= $\frac{0}{\mathrm{n}} = 0$.

4. Вероятность противоположного события равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Событие А называется *независимым* от события В, если наступление события В не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события А.

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них. Сумму событий А и В обозначают А+В или $A \cup B$.

Произведением конечного числа событий называется событие, состоящее в том, что каждое из них произойдет. Произведение событий А и В обозначают $A \cdot B$ или $A \cap B$.

Вероятность суммы событий: Р(А+В)	А и В – несовместные события	Р(А+В)=Р(А) +Р(В)
	А и В – совместные события	Р(А+В)=Р(А) + Р(В) – Р(АВ)

Вероятность наступления события А при условии наступления другого события В, называется *условной вероятностью* и обозначается Р(А/В).

Вероятность произведения событий: Р(АВ)	А и В – независимые события	Р(АВ)=Р(А) Р(В)
	А и В – зависимые события	Р(АВ)=Р(А) Р(В/А)

Пример 1. Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что:

а) выпадет четное число очков (событие А);
б) выпадет число очков, кратное 3 (событие В);
с) выпадет любое число очков, кроме 5 (событие С).

Решение.

а) На гранях игральной кости имеется три четные цифры (2, 4 и 6), т.е. число искомых исходов m = 3. Число всех возможных исходов равно 6

(выпадет любое число очков от 1 до 6). Значит, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

б) Здесь имеются две цифры, кратные трем: 3 и 6. Следовательно, m=2, а число всех возможных исходов n = 6, откуда $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

с) Искомыми исходами являются цифры 1, 2, 3, 4, 6 – всего их пять (m=5). Число всех возможных исходов n= 6. Поэтому $P(C) = \frac{5}{6}$.

Пример 2. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20 руб., на 10 – по 15 руб., на 15 – по 10 руб., на 25 – по 2 руб. и на остальные – ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10 руб.

Решение. Пусть A, B и C – событие, состоящее в том, что на купленный билет попадает выигрыш, равный соответственно 20, 15 и 10 руб. Так как события A, B и C несовместны, то искомая вероятность равна:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}=0{,}3$$

Ответ: 0,3

Пример 3. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента выйдут из строя; б) оба элемента будут работать.

Решение. Пусть событие A – выход из строя первого элемента, событие B – выход из строя второго элемента. Эти события независимы (по условию).

а) Одновременно появление A и B есть событие AB. Следовательно, P(AB) =0,2·0,3 = 0,06.

45

б) Если работает первый элемент, то имеет место событие $\overline{A}$ (противоположное событию A – выходу этого элемента из строя); если работает второй элемент – событие $\overline{B}$. Найдем вероятность событий и: P($\overline{A}$)=1 – P(A) = 1 -0,2 = 0,8; P($\overline{B}$) =1 – P(B) = 1 – 0,3 = 0,7. Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\overline{AB}$ и, значит, P($\overline{AB}$) = P($\overline{A}$) P($\overline{B}$) = 0,8 · 0,7 = 0,56.

Пример 4. В урне находится 7 красных и 6 синих шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара красные (событие A)?

Решение. Число равновозможных независимых испытаний равно

$$n=C_{13}^2=\frac{13\cdot 12}{1\cdot 2}=78.$$

Событию A благоприятствуют $m=C_7^2=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}=21$ исходов. Следовательно,

$$\mathrm{P(A)}=\frac{21}{78}=\frac{7}{26}.$$

Пример 5. В партии из 24 деталей пять бракованных. Из партии выбирают наугад 6 деталей. Найти вероятность того, что среди этих 6 деталей окажутся 2 бракованных

(событие В).

Решение. Число равновозможных независимых исходов равно

$$n = C_{24}^{6} = \frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 134596.$$

Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию В. Среди шести взятых наугад деталей должно быть 2 бракованных и 4 стандартных. Две бракованные детали из пяти можно выбрать $C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$ способами, а 4 стандартных детали из 19 стандартных деталей можно выбрать $C_{19}^{4} = \frac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 3876$ способами.

Каждая комбинация бракованных деталей может сочетаться с каждой комбинацией стандартных деталей, поэтому m = 3876 · 10 = 38760. Следовательно, $P(B) = \frac{38760}{134596} = \frac{510}{1771} \approx 0{,}3$.

Пример 6. Девять различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что четыре определенные книги окажутся поставленными рядом (событие С).

Решение. Здесь число равновозможных независимых исходов

есть $n = P_9 = 9!$. Подсчитаем число исходов m, благоприятствующих событию С. Представим себе, что четыре определенные книги связаны вместе, тогда эту связку можно расположить на полке $P_6 = 6!$ Способами (связки плюс остальные пять книг). Внутри связки четыре книги можно переставлять $P_4 = 4!$ способами. При этом каждая комбинация внутри связки может сочетаться с каждым из P_6 способов образования связки, т.е. $m = 6! \cdot 4!$. Следовательно,

$$P(C) = \frac{6!\cdot 4!}{9!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} = \frac{1}{21}$$

Формула полной вероятности

Предположим, что событие А может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, называемых *гипотезами.* Тогда справедлива следующая *формула полной вероятности:*

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \ldots + P(A/H_n)P(H_n) \qquad \textbf{(6)}$$

т.е. вероятность события А равна сумме произведений условных вероятностей этого события по каждой из гипотез на вероятность самих гипотез.

Докажем это. По условию, событие А может произойти лишь вместе с одним из событий H_1, H_2,…, H_n . Следовательно, $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + A H_n$.

Так как события H_1, H_2, …, H_n попарно несовместны, то несовместны и события AH_1, AH_2, …, AH_n. Поэтому, применяя теорему сложения, находим

$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(A H_n)$.

Заменив каждое слагаемое $P(AH_1)$ на $P(A/H_1)P(H_1)$, получим

$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \ldots + P(A/H_n)P(H_n)$.

Пример 1. Имеется три партии ламп по 20, 30 и 50 штук в каждой. Вероятность того, что лампа проработают заданное время, равна для каждой партии соответственно 0,7; 0,8 и 0,9.Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа из ста данных ламп проработает заданное время?

Решение. Пусть событие А состоит в том, что взятая наугад лампа проработает заданное время, а H_1, H_2 и H_3 – гипотезы, что лампа принадлежит соответственно первой, второй и третьей партии.

Тогда $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}3$, $P(H_3) = 0{,}5$. Вероятность того, что лампа проработает заданное время, составляют $P(A/H_1)= 0.7$. $P(A/H_2) = 0{,}8$,

$P(A/H_3)= 0{,}9$. (по условию). По формуле полной вероятности находим

$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + P(A/H_3)P(H_3)$

$= = 0{,}7\cdot0{,}2+0{,}8\cdot0{,}3 + 0{,}9\cdot0{,}5=0{,}83$.

Пример 2. Имеется две одинаковых урны. Первая содержит 2 черных и 3 белых шара, вторая – 2 черных и 1 белый шар. Сначала произвольно выбирают урну, а затем из нее наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что будет выбран белый шар?

Решение. Пусть событие А состоит в том, что белый шар извлечен из произвольной урны, а H_1 и H_2 – гипотезы, что он принадлежит соответственно первой или второй урне. Тогда

вероятность $P(H_1)=P(H_2) = \frac{1}{2}$.

Вероятность того, что белый шар принадлежит первой урне,

$P(A/H_1) = \frac{3}{5}$, а вероятность того, что белый шар принадлежит

второй урне $P(A/H_2) = \frac{1}{3}$. По формуле полной вероятности получим

$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) =$

$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{7}{15}.$

Формула Бернулли

Мы рассматривали случайные события, связанные с некоторыми единичными испытаниями. Однако для практики и самой теории вероятностей представляет интерес изучения серии испытаний, которые производятся независимо.

Примерами серий независимых испытаний могут служить подбрасывание монет, стрельба по мишени, выбор изделия для контроля.

Все испытания делаются многократно и в одинаковых условиях.

Пусть производится «n» независимых испытаний, в которых событие А может появиться, либо не появиться. Вероятность

появления события А в каждом испытании одна и та же, а именно р, следовательно вероятность не наступления А в каждом испытании также постоянна и равна q = 1 – р.

Необходимо вычислить вероятность того, что при «n» испытаниях событие А осуществилось «k»раз.

Вероятность одного сложного события состоящего в том, что в «n» испытаниях событие А наступило «k» раз и не наступило «n – k» раз по теореме умножения вероятностей независимых событий

$p^k q^{n-k}$

Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из «n» элементов по «k», т.е. C_n^k.

Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех всевозможных сложных событий.

Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность равна вероятности одного сложного события умноженного на их число **$P_n(k)$ =** $C_n^k p^k q^{n-k}$

Пример 1. Вероятность приема радиосигнала 0,9. Найти вероятность того, что при 6-кратной передачи сигнала, будет принято 4.*Решение.* Событие А – прием радиосигнала. n = 6, k = 4, тогда $P_6(4)$ =

$C_6^4 p^4 q^{6-4} = \frac{6!}{(6-4)!4!}(0{,}9)^4(1-0{,}9)^{6-4} =$

$= \frac{4!5\cdot 6}{2!\cdot 4!}\cdot 0{,}6561\cdot 0{,}01 = 15\cdot 0{,}6561\cdot 0{,}01 = 0{,}098415$.

Пример 2. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб появится два раза? $\frac{10!}{(10-2)!\,2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8*\cdot 9\cdot 10}{8!\,2!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{256} =$

Решение. Событие А – появление герба при подбрасывание монеты, тогда вероятность появления герба равна $\frac{1}{2}$

$$_{10}(2) = C_{10}^2\, p^2 q^{10-2}$$

$$= \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{256} = 45\cdot\frac{1}{1024} \approx 0{,}04.$$

Случайные величины, законы их распределения и числовые характеристики. Математическое ожидание и дисперсия

Случайной величиной называется переменная величина, которая в зависимости от исходов испытания принимает то или иное значение (зависящее от случая).

Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной случайной величиной*.

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной.*

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между значениями x_1 , x_2 , x_3 , ... этой величины и их вероятностями p_1 , p_2 , p_3 , ...

Значения X_i	X_1	X_2	X_3	...	X_n
Вероятность P_i	P_1	P_2	P_3	...	P_n

События $X = x_i$ ($i = 1, 2{,}3, \ldots{,}n$) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Пусть производится определенное число n независимых опытов, причем в каждом из них с одной и той же вероятностью может наступить некоторое событие р. Рассмотрим случайную величину X, представляющую собой число наступлений событий А в n опытах. Закон ее распределения имеет вид:

Значения X_i	0	1	2	...	n
Вероятность P_i	$P(A_{n,0})$	$P(A_{n,1})$	$P(A_{n,2})$	...	$P(A_{n,n})$

где $P(A_{n,k})$ вычисляется по *формуле Бернулли* $P(A_{n,k})=$

$^{n-k}$, а

Значения X_i	0	1	2	. . .	n
Вероятность P_i	$C_n^0 p^0 q^{n-0}$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	. . .	$C_n^n p^n q^{n-n}$

Закон распределения, который характеризуется такой таблицей, называется *биномиальным.*

Пример 1. Монету подбрасывают пять раз. Составить закон распределения случайной величины X – число выпадения герба.

Решение:

X – число выпадения герба. Возможны следующие значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Зная, что вероятность

$C_n^k p^k q$ $\qquad q = 1 - p.$

выпадения герба в одном испытании равна . Найдем

вероятности значений случайной величины X по формуле Бернулли:

$P(A_{5,0})=$ $C_5^0 \cdot p^0 \cdot (1+-p)^{5-0} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

; $P(A_{5,1})=$ $C_5^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^{5-1} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$;

$P(A_{5,2})=$ $C_5^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^{5-2} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$;

$P(A_{5,3})=$ $C_5^3 \cdot p^3 \cdot (1-p)^{5-3} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$;

$P(A_{5,4})=$ $C_5^4 \cdot p^4 \cdot (1-p)^{5-4} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$;

$P(A_{5,5})=$ $C_5^5 \cdot p^5 \cdot (1-p)^{5-5} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$.

Закон распределения имеет вид:

Значения x_i	0	1	2	3	4	5
Вероятности p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Произведем проверку:

$$+\frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = 1.$$

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной.*

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между значениями x_1 , x_2 , x_3 , ... этой величины и их вероятностями p_1 , p_2 , p_3 , ...

Значения X_i	X_1	X_2	X_3	...	X_n
Вероятность P_i	P_1	P_2	P_3	...	P_n

Графически: в прямоугольной системе координат на плоскости строят точки (xi, pi) и соединяют их последовательно отрезками прямых. Получающаяся при этом ломаная линия называется *многоугольником распределения случайной величины*.

События $X = x_i$ ($i = 1, 2,3, \ldots,n$) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему

событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

*1.**Математическим ожиданием*** M(X) (или средним значением) дискретной величины X называется число, вычисляемое по формуле:

$$M(X) = x \cdot p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины X равно сумме произведений возможных значений этой величины на их вероятности.

2.Дисперсией случайной величины D(X) называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M((X - M(X))^2) \text{ или } D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

т.е. как разность математического ожидания квадрата значений случайной величины и квадрата ее математического ожидания.

3.С*реднее квадратическое отклонение* σ (X) случайной величины X характеризует примерный размах самого отклонения и вычисляется по формуле:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 1. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	1	2	3	4
P	0,1	0,3	p_3	0,2

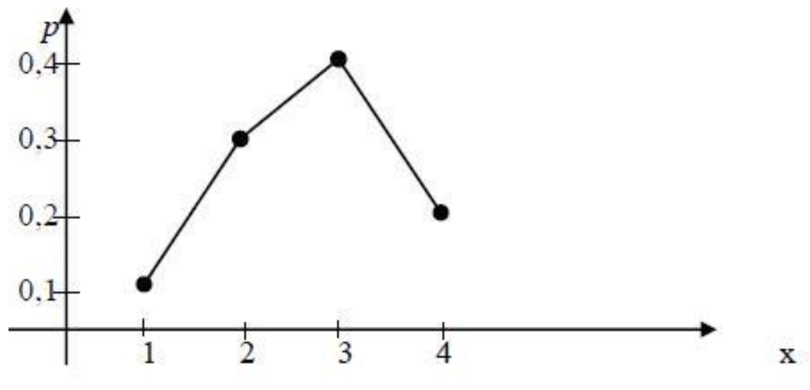
Найти:

1. вероятность p_3;
2. математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение;
3. построить многоугольник распределения.

Решение:

1. Так как $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, то $p_3 = 1 - (p_1 + p_2 + p_4) = 1 - (0,1 + 0,3 + 0,2) = 0,4$

   Итак $p_3 = 0,4$.
2. Найдем математическое ожидание: $M[X] = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,2 = 2,7$.
3. Найдем дисперсию: $D[X] = 1 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,4 + 4^2 \cdot 0,2 - (2,7)^2 = 0,81$.
4. Найдем среднее квадратическое отклонение: $\sigma[X] = \sqrt{0,81} = 0,9$.
5. Построим многоугольник распределения:



Задания к контрольной работе

Вариант № 1

1. Тело движется прямолинейно по закону s = $3t^3 + 2t^2 - 5t + 1$. Определить скорость в конце 2ой секунды
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$
3. Выполнить действия $(1-j)^2$.
4. Исследовать функцию на экстремумы $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$
5. Пароль состоит из 6 букв: p, f, j, s, y, t. Каждая буква встречается ровно один раз. Тогда максимальное количество возможных паролей равно

6. Вычислите: $\int \frac{x^2 + x}{x^2} dx$

Вариант № 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \frac{1}{2} x^3$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

2.Вычислите значение производной функции

$y = e^x \sin x + x^2$ в точке $x_0 = 0$.

3.Вычислить: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x + 3}$

4.Вычислите: $\int_0^2 (x^2 + x + 1) dx$

5.Закон распределения вероятностей для дискретной случайной величины X имеет вид:

X	4	5
P	0,6	0,4

6.В турнире участвовало 16 шахматистов, причем каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

Вариант № 3

1. Прямоугольный участок площадью 9 м^2. Необходимо обнести колючей проволокой. Какими должны быть длина и ширина участка, чтобы проволоки ушло наименьшее количество и какое?
2. Найти f '$\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, если f(x) = ctgx + 4x

3 .Вычислить предел:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+8}$$

4. Некоторая функция у = $f(x)$ задана в таблице

x_i	-1	0	1
p_i	2	3	5

5.Вычислить: $\int x(2x+1)^9\,dx$.

6. В урне 12 разных шаров. Сколько существует вариантов вынуть 5 шаров?

Вариант № 4

1. Вычислите: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-x}{x}$
2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{2n}$
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

   $y=\frac{1}{x}$, x = 1, x = 2, y=0
4. Выполнить действия $\frac{1-5j}{4+j}$;
5. Вычислите: $\int\limits_0^2 (x^2+x+1)dx$
6. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень по отдельности равна соответственно 0,8 и 0,6.Найти вероятность того, что мишень: а) будет поражена хотя бы

один раз; б) будет поражена ровно один раз.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1.Формулы сокращенного умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2.Таблица значений тригонометрических функций

α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α (deg)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

3.Таблица арктангенсов

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

4.Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(a^x)' = a^x \ln a$;
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
8. $(\sin x)' = \cos x$;
9. $(\cos x)' = -\sin x$;
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$;
15. $(\operatorname{ar\,cctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

5.Табличные интегралы

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
11. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основные источники:

1.1 Богомолов Н.В. Математика: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Математика : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 396 с. — Режим доступа: - URL: https://www.biblio-online.ru/book/F7C570BC-85B6-4E2D-9B5A-4CB297E61C8E

1.2Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 285 с. — Режим доступа: - URL: https://www.biblio-online.ru/book/B2077BBB-EF95-4E5F-AFE1-9AAB6EB69A17

2. Дополнительные источники:

2.1 Дорофеева, А. В. Математика. Сборник задач : учебно-практическое пособие для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — 2-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08796-3. — URL : https://urait.ru/bcode/449051

2.2 Дегтярева, О.М. Краткий теоретический курс по математике для бакалавров и специалистов: учебное пособие / О.М. Дегтярева, Г.А. Никонова; Министерство образования и науки России, ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 136 с.: ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1523-5; То же [Электронный ресурс]. - URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=427858

2.3 Зализняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике: учебное пособие / В.Е. Зализняк, Г.И. Щепановская; Министерство образования и науки РФ, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. - 174 с.: табл. - ISBN 978-5-7638-2498-8; То же [Электронный ресурс]. - URL: //biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229271

3. Интернет-ресурсы:

3.1ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: http://biblioclub.ru/
3.2Электронная библиотечная система «Лань»: http://e.lanbook.com/
3.3Сайт: http:// shool-collection.edu.ru
3.4«Квант». Форма доступа: www.kvant.mirror1.mccme.ru