

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта -
филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения»
(УУКЖТ ИрГУПС)



Н.В.Дубович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению контрольной работы
дисциплины ЕН.01 Математика

для специальности
27.02.03 Автоматика и телемеханика на транспорте (железнодорожном
транспорте)

Базовая подготовка
среднего профессионального образования

Заочная форма обучения

Улан-Удэ

2023

1

Электронный документ выгружен из ЕИС ФГБОУ ВО ИрГУПС и соответствует оригиналу

Подписант ФГБОУ ВО ИрГУПС Трофимов Ю.А.

00a73c5b7b623a969ccad43a81ab346d50 с 08.12.2022 14:32 по 02.03.2024 14:32 GMT+03:00

Подпись соответствует файлу документа



УДК 51 (07)

ББК 22.1

Д-796

Дубович Н.В.

Д-796 **ЕН.01 Математика:** Методические указания по выполнению контрольной работы для обучающихся среднего профессионального образования заочной формы обучения специальности 23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог (вагоны) / Н.В.Дубович; Улан-Удэнский колледж железнодорожного транспорта ИрГУПС. - Улан-Удэ: Сектор информационного обеспечения учебного процесса УУКЖТ ИрГУПС, 2023. – 37с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплине «Математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

УДК 51 (07)

ББК 22.1

Рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании Методического совета колледжа протокол № 5 от 10.05.2023

© Дубович Н.В., 2023

© УУКЖТ ИрГУПС, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Общие методические указания.....	4
Теоретический материал.....	5
Раздел 1. Линейная алгебра.....	5
Раздел 2 Основы математического анализа	15
Раздел 3. Алгебра логики	23
Задания к контрольной работе.....	31
Список использованной литературы:.....	36

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по дисциплине «Прикладная математика», для выполнения домашней контрольной работы. Методические указания содержат краткое изложение теоретического материала, решение типовых примеров и задач, охватывающих основные разделы программы.

Основное назначение данного пособия состоит в том, чтобы помочь студенту заочной формы обучения самостоятельно справиться с выполнением контрольной работы, научиться решать задачи по всем разделам курса по данным дисциплинам.

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради школьного формата.

2. На обложке тетради наклеивается информационный лист с указанием: шифра, специальности, фамилии, имени, отчества студента, предмет и номер работы.

3. Работа должна быть выполнена пастой одного цвета, аккуратно и разборчиво.

4. Каждую задачу надо начинать с новой страницы.

5. Решение задач желательно располагать в порядке номеров, указанных в задании, номера задач следует указывать перед условием.

6. Условия задач должны быть обязательно переписаны полностью в контрольную тетрадь.

7. При оформлении записей в тетради необходимо выполнять общие требования к культуре их ведения. Перечислим важнейшие из этих требований:

- необходимо соблюдать абзацы, всякую новую мысль следует начинать с красной строки;

- важные формулы, равенства, определения нужно выделять в отдельные строки. Чтобы сделать их более обзримыми;

- при описании решения задачи краткая запись условия отделяется от решения и в конце решения ставится ответ;

- серьезное внимание следует уделять правильному написанию сокращенных единиц величин;

- необходимо правильно употреблять математические символы.

8. Решения задач должны сопровождаться краткими, но достаточно обоснованными пояснениями, используемые формулы нужно выписывать.

9. Чертежи следует выполнять карандашом с использованием чертежных инструментов, соблюдая масштаб.

10. В конце работы следует указать литературу, которой вы пользовались. Проставить дату выполнения работы и подпись.

11. Если в работе допущены недочеты и ошибки, то студент должен выполнить все указания преподавателя, сделанные в рецензии.

12. Контрольная работа должна быть выполнена в срок (в соответствии с учебным планом).

13. Работа, выполненная не по своему варианту, не учитывается и возвращается студенту без оценки.

14. Студент, не имеющий зачета по контрольной работе, к экзамену не допускается.

15. Во время экзамена зачтенные контрольные работы представляются преподавателю вместе с данными методическими указаниями.

16. Контрольная работа имеет 4 варианта. Вариант работы выбирается преподавателем

Теоретический материал

Раздел 1. Линейная алгебра

Комплексные числа

1. Комплексные числа и действия над ними.

Решение многих задач сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому исследование алгебраических уравнений является одним из важнейших вопросов математики.

Действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое алгебраическое уравнение. Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Поэтому приходится расширять множество действительных чисел до множества, такого, чтобы в этом множестве уравнение вида $x^2 + a^2 = 0$ имели решения.

Корень уравнения $x^2 + 1 = 0$ или $x^2 = -1$ называется *мнимой единицей* и обозначается i .

Число вида $z = a + bi$, где a и b – любые действительные числа, а i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется комплексным числом.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа вида $z = a + bi$, а число bi – *мнимой частью*.

Два комплексных числа $z = a_1 + i b_1$ и $z = a_2 + i b_2$ считаются **равными**, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2$, $b_1 i = b_2 i$

Два комплексных числа называют *сопряженными*, если они отличаются друг от друга только знаком перед мнимой частью.

Сопряженные комплексные числа обозначают: z и \bar{z} . Например, $z_1 = 1 + 2i$ и $\bar{z}_1 = 1 - 2i$;

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Пусть даны комплексные числа: $z_1 = a + bi$

и $z_2 = c + di$. 1. Сложение $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

2. Вычитание $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

3. Умножение

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

4. Возведение комплексного числа в степень производится по формулам возведения двучлена в соответствующую степень, но при

этом надо

учитыв

ать,

что i

$$i^1 = i, i$$

4

$$i^{n+1} = i^1,$$

$$i^2 = -1, i$$

4

$$i^{n+2} = i^2 =$$

-1,

$$i^3 = -i, \quad i^{4n+3} = i^2 = -i,$$

$$i^4 = 1, \quad i^{4n} = 1$$

5. При делении двух комплексных чисел в алгебраической форме, необходимо умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример 1.

1. $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = (2 + 5) + (3 - 7)i = 7 - 4i$;

2. $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = (2 - 5) + (3 - (-7))i = -3 + 10i$;

3.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i$$
;

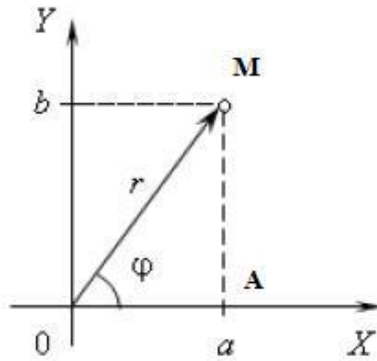
4. $(2 + 3i)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$;

$(3 + 5i)^3 = 125 + 3 \cdot 25 \cdot 3i + 3 \cdot 5 \cdot 9i^2 + 27i^3$, так как $i^2 = -1$, $i^3 = -i$,
то получим $(3 + 5i)^3 = 125 + 225i - 135 - 27i = -10 + 198i$

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Любое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить на комплексной плоскости точкой Z с координатами $(a; b)$. Модулем комплексного числа называется длина вектора OM ,

изображающего комплексное число на координатной (комплексной) плоскости: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Пусть дано комплексное число $z = a + bi$, выразим действительные числа a и b через модуль r и аргумент φ числа z следующим образом: $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$. Таким образом, комплексное число можно записать в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где r - модуль комплексного числа, а φ - один из его аргументов. Представление комплексного числа в указанном виде называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Итак, существует три формы записи комплексного числа: $z = a + bi$ - алгебраическая форма; $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ - тригонометрическая форма;

$z = re^{i\varphi}$ - показательная форма.

Правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и показательной:

1. Найти модуль r комплексного числа находим по формуле: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Изобразить комплексное число на комплексной плоскости и определить четверть, в которой находится точка Z .

3. В зависимости от четверти, найти аргумент φ комплексного числа

4. Записать число в тригонометрической форме, подставив все найденные значения в формулу: $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, в

показательной - $z = re^{i\varphi}$.

Пример . Представить в тригонометрической и показательной

формах комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$.

Решение:

1) находим модуль комплексного числа:

$$a = 3; b = \sqrt{3}$$

$$|z| = r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$$

2) находим главное значение аргумента комплексного числа z : так как вектор, изображающий число z лежит в I четверти и

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ то } \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

3) находим тригонометрическую форму: $z = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, находим показательную форму: $z = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Свойства определителей и их вычисление

Содержание материала: определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

1. Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента a_{ij} , первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j - номер столбца.

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется **прямоугольной**. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

()

Если число строк равно числу столбцов ($m = n$), то матрица называется *квадратной*. Например, квадратными являются матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, в последнем примере порядок матрицы А равен 2, а порядок матрицы В равен 3.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны. Так, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \text{ равны, если } a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12},$$

$$a_{21} = b_{21}, a_{22} = b_{22}, a_{23} = b_{23}.$$

$$a_{13} = b_{13}, a_{21} = b_{21}, a_{22} = b_{22}, a_{23} = b_{23}.$$

Равные матрицы обязательно либо имеют одно и то же строение: m обе они прямоугольные типа $m \times n$, либо квадратные одного и же порядка n .

Линейные операции над матрицами

Суммой матриц A и B называют такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B . Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа $m \times n$, или квадратные порядка n .

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда сумма матриц $C = A+B$ имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Сложить матрицы A и B , если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$

Решение:

а) Здесь A и B - квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

б) Здесь A и B - прямоугольные матрицы типа 2×3 . Складываем

их соответствующие элементы: $C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$

в) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как A есть матрица типа 3×2 , а B - матрица типа 2×3 ; можно складывать только прямоугольные матрицы одного типа.

ким образом, сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяется переместительный закон сложения: $A+B=B+A$.

Произведением матрицы A на число k называется такая матрица kA , каждый элемент которой равен ka_{ij} , т. е. если $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ то } kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример 2. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число $k = 3$.

Решение: Умножая каждый элемент матрицы A на 3, получим:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, тогда **произведением** этих

матриц называется матрица $C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$. Чтобы найти элемент c_{11} первой строки и

первого столбца матрицы C , нужно каждый элемент первой строки матрицы A (т. е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (т.е. b_{11} и b_{21}) и полученные произведения сложить; чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы C , нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить; аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22} .

Пример 3. Найти произведение матриц A и B , если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 11 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц, при чем справедливы правила:

1) умножение матрицы А на матрицу В имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, т. е. $AB \neq BA$.

2. Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя переменными x , y , z :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 ; \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 ; \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 . \end{cases}$$

Определителем третьего порядка называется число, вычисляемое по правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - a_2 b_1 c_3$$

Правая часть состоит из алгебраической суммы шести членов, из которых три взяты со знаком «плюс», а три со знаком «минус». Со знаком «плюс» входят произведения элементов, лежащих по *главной диагонали*, а также произведения элементов, лежащих на параллелях к этой диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя, а со знаком «минус» –

произведения элементов побочной диагонали, а также произведения элементов, лежащих на параллелях к *побочной диагонали*, с добавлением третьего множителя из противоположного угла определителя. Это правило называют **правилом треугольника**.

Пример 1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -6 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 10 - 0 + 1 + 24 = 53.$$

Алгоритм решения систем трех уравнений с тремя неизвестными методом Крамера:

1. Вычислить главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

2. Вычислить определитель $\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

3. Вычислить определитель $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix};$

4. Вычислить определитель $\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix};$

5. В зависимости от полученных значений определить решение системы исходя из трех возможных случаев:

- если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение: $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$;

- если $\Delta = 0$, а Δx , Δy , Δz одновременно не равны нулю (т.е. $\Delta^2 x + \Delta^2 y + \Delta^2 z > 0$), то система не имеет решений;

• если $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, , то система имеет множество решений.

Пример 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ 2x + 3y + z = 14, \\ x + 2y - z = 7. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 14, \\ x + 2y - z = 7. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16$.

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Вычислим теперь Δx , Δy , Δz :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 32; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 48; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 16.$$

Подставив найденные определители в формулы Крамера, получим:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1.$$

Ответ: (2; 3; 1).

Раздел 2. Математический анализ

Дифференциальное и интегральное исчисление

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке. Возьмем из этого промежутка фиксированное значение аргумента x и придадим ему приращение Δx так, чтобы новое значение аргумента $x + \Delta x$ принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции $f(x)$ заменится новым значением $f(x) + \Delta y = f(x + \Delta x)$, т.е. функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю называется *производной функции* $y = f(x)$, т.е

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x , то она называется дифференцируемой в этой точке.

Производная сложной функции

Сложная функция – это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций, а не какую-то ее особенную сложность. Например, функция $y = \sin 3x$ является сложной. Если обозначить $3x = u$, то получим $\sin u$, где u – промежуточная функция. В сложную функцию может входить не одна, а несколько промежуточных функций. Например, для функции $y = \cos^2 2x$ промежуточными функциями служат $u = \cos v$ и $v = 2x$.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$y' (x) = y' (u) \cdot u' (x).$$

Примеры.

1. $y = (x^2 + 3x)^5$

Решение. Полагая $u = x^2 + 3x$, получим $y = u^5$. По формуле (10) находим $y' = 5(u)^4 (u)' = 5(x^2 + 3x)^4 (x^2 + 3x)' = 5(x^2 + 3x)^4 (2x + 3)$.

Такая подробная запись производится только в процессе освоения техники дифференцирования. При навыке промежуточные вычисления производятся в уме.

Ответ: $y' = 5(x^2 + 3x)^4 (2x + 3)$.

2. $y = \sin 3x$

Решение. Полагая $u = 3x$, получим $y = \sin u$. По формуле (13)

$$y' = \cos u (u)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cos 3x.$$

Ответ: $y' = 3 \cos 3x$.

3. $y = \ln \cos x$

Решение. Полагая $\cos x = u$; получим $y = \ln u$; По формуле (8)

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

Ответ: $y' = -\operatorname{tg} x$.

4. $y = 2^{\ln x}$

Решение. Полагая $\ln x = u$, получим $y = 2^u$. По формуле (12). $y' = (2^u)' = 2^u \ln 2 \cdot u'$

$$y' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x)' = 2^{\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x};$$

Неопределенный интеграл

1. Основные формулы интегрирования

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ в промежутке $a \leq x \leq b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \leq x \leq b.$$

Отыскание первообразной функции по заданной ее производной $f(x)$ или по дифференциалу $f(x)dx$ есть действие, обратное дифференцированию, - интегрирование.

Совокупность первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)dx$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C$, если $d(F(x) + C) = f(x)dx$.

Здесь $f(x)$ подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; C - произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d \int f(x)dx = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx \right)' = f(x).$$

3. Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

4. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$$

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ – любая известная функция, имеющая непрерывную производную, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов (смотри приложение 5). Здесь могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу; 2) данный интеграл после применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 3 и 4 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример.

Найти следующие интегралы:

$$1. \int 5dx; \quad 2. \int 4(x^2 - x + 3)dx; \quad 3. \int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx; \quad 4. \int \frac{dx}{x^4}.$$

1. На основании свойства 4 постоянный множитель 5 выносим за знак интеграла и, используя формулу (1), получим

$$\int 5dx = 5x + C.$$

2. Используя свойство 3 и 4 и формулу (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \int 4(x^2 - x + 3)dx &= 4 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 12 \int dx = \\ &= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C \end{aligned}$$

3. Используя свойство 3 и 4 и формулу (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx &= 4 \int x^3 dx - 15 \int x^2 dx + 14 \int x dx - 3 \int dx = \\ &= 4 \frac{x^4}{4} - 15 \frac{x^3}{3} + 14 \frac{x^2}{2} - 3x + C = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + C. \end{aligned}$$

4. Используя формулу (2), находим:

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Способ подстановки

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

Этот метод называют также *методом замены переменной*. Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Он заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Примеры.

1. Найти $\int (2+x)^7 dx$.

$$\int (2+x)^7 dx = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + C = \frac{(2+x)^8}{8} + C.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2+x=t \\ (2+x)'dx=dt \\ \hline dx = dt \end{array} \right|$$

Ответ: $\frac{(2+x)^8}{8} + C$

Определенный интеграл

Определение. Если $F(x) + C$ – первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b) - F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от $x = a$ до $x = b$ называется *определенным интегралом*.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

где a - нижний предел, а b – верхний предел определенного интеграла.

Для вычисления определенного интеграла *применяется формула*

Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Все методы интегрирования, используемые при нахождении неопределенных интегралов, применяются и при вычислении определенных интегралов. Числовое значение определенного интеграла зависит от вида функции, стоящей под знаком интеграла, и от значений верхнего и нижнего пределов и не зависит от обозначения переменной.

1. Вычисление определенных интегралов по готовым формулам:

$$1. \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}.$$

2.

$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^2 = \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{1}{3} (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) \right] = 9.$$

Решить

самостоятельно:

2

$$1. \int x^3 dx;$$

3

$$1. \int_1^3 x^4 dx$$

1

3

$$2. \int (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx$$

0

$$2. \int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx$$

-2

$$3. \int_0^1 \frac{dx}{x+2}$$

3

$$3. \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{dx}{x-1}$$

Приложение производной функции и определенного интеграла к решению различных прикладных задач

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается *теорема Вейерштрасса*, утверждающая, что *непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т.е. существуют точки отрезка $[a;b]$, в которых f принимает наибольшее и наименьшее на $[a;b]$ значения.*

Для случая, когда функция f не только непрерывна на отрезке $[a;b]$, но имеет на этом отрезке лишь конечное число критических точек, укажем *правило отыскания наибольшего и наименьшего значений f .*

Предположим сначала, что f не имеет на отрезке $[a;b]$ критических точек, тогда f возрастает или убывает на этом отрезке, и, значит, наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[a;b]$ – это значения в концах a и b .

Пусть теперь функция f имеет на отрезке $[a;b]$ конечное число критических точек. Эти точки разбивают отрезок $[a;b]$ на конечно число отрезков. Внутри которых критических точек нет. Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции f на таких отрезках принимаются в их концах, т.е. в критических точках функции или в точках a и b .

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Схема применимая к решению разнообразных прикладных задач:

- 1) задача «переводится» на язык функций. Для этого выбирают удобный параметр x , через который интересующую нас величину выражают как функцию $f(x)$;
- 2) средствами анализа ищется наибольшее или наименьшее значение этой функции на некотором промежутке;
- 3) выясняется, какой практический смысл (в терминах

первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Вообще решение практических задач средствами математики, как правило, содержит три основных этапа: 1) формализацию (перевод исходной задачи на язык математики); 2) решение полученной математической задачи и 3) интерпретацию найденного решения («перевод» его с языка математики в терминах первоначальной задачи).

Пример 1. Каковы должны быть размеры прямоугольной комнаты площадью 25м^2 , чтобы периметр ее был наименьшим?

Решение. Примем длину комнаты равной $x(\text{м})$, тогда ширина равна $\frac{25}{x}$, а периметр

$$y = 2 \left(x + \frac{25}{x} \right)$$

Периметр y есть функция длины x , определенная для всех положительных

значений x . Определим интервалы ее возрастания и убывания.

Находим производную: $y' = \frac{2(x-5)(x+5)}{x^2}$. Так как знаменатель больше

нуля и длина x положительна, то знак производной определяется знаком разности $(x-5)$. Таким образом, периметр прямоугольника имеет наименьшее значение (минимум), если длина прямоугольника 5м и ширина $\underline{=5}$ м, т.е. когда комната имеет квадратную форму.

Ответ: $P = 20\text{м}$

Пример 2. Из листа железа размером $1,5 \times 1,5\text{м}^2$ вырезают по углам квадраты. Чтобы при сметании получить емкость. Какой длины должны быть стороны вырезанных квадратов, чтобы получить емкость с наибольшим объемом?

Решение. Обозначим сторону вырезанного квадрата через x , тогда сторона основания емкости будет равна $1,5 - 2x$, объем емкости

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H = (1,5 - 2x)^2 \cdot x = 2,25x - 6x^2 + 4x^3.$$

Найдем первую производную $V' = 12x^2 - 12x + 2,25$.

Найдем точки экстремумов $V' = 0$; $12x^2 - 12x + 2,25 = 0$;

$x = 0,25$; $x = 0,75$. Найдем вторую производную $V'' = 24x - 12$; $V''(0,25) < 0$, $V''(0,75) > 0$.

При $x = 0,25$ имеем максимум, следовательно сторона вырезанного квадрата равна $0,25$ м.

Ответ: сторона вырезанного квадрата равна $0,25$.

Раздел 3 Основные численные методы

Численное интегрирование

Приближенное вычисление определенных интегралов

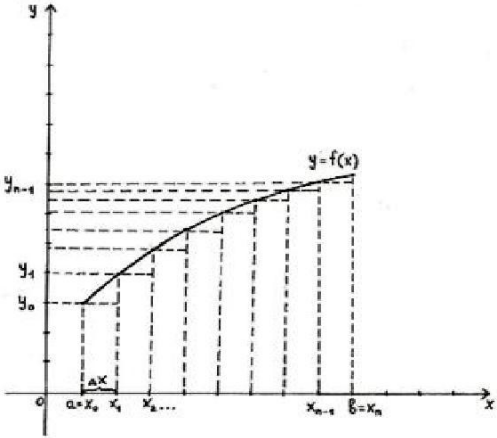
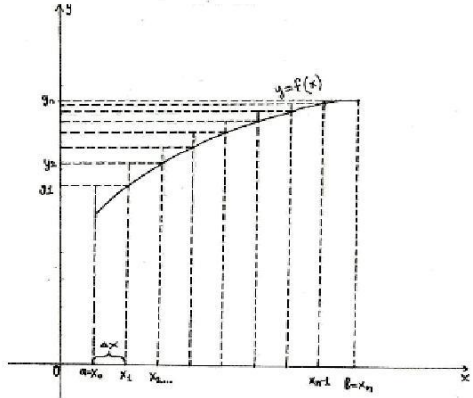
Часто приходится вычислять определённые интегралы, для которых невозможно найти первообразную. В этом случае применяют приближённые методы вычисления. Иногда приближённый метод применяют и для “берущихся” интегралов, если вычисление по формуле Ньютона-Лейбница не рационально. Идея приближённого вычисления интеграла заключается в том, что кривая $y = f(x)$ заменяется новой, достаточно “близкой” к ней кривой. В зависимости от выбора новой кривой можно использовать ту или иную приближённую формулу интегрирования. Рассмотрим три приближенных метода: метод прямоугольников, метод трапеций, метод парабол (метод Симпсона).

Метод прямоугольников

Геометрически идея способа вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников состоит в том, что площадь криволинейной трапеции ABCD заменяется суммой площадей

прямоугольников, одна сторона которых равна $\frac{b-a}{n}$, а другая -

$y = f(x_n)$. Если суммировать площади прямоугольников, которые показывают площадь криволинейной трапеции с недостатком и избытком, то получим формулы:

<i>с недостатком:</i>	<i>с избытком:</i>
	
$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$	$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$

Значения y_0, y_1, \dots, y_n находят из равенств $y_k = f(a + k\Delta x)$, $k = 0, 1, \dots, n$. С увеличением n результат становится более точным.

Итак, чтобы найти приближённое значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формуле прямоугольников, необходимо:

- разделить отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$;
- вычислить значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках деления, т.е. найти $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$;
- воспользоваться одной из приближённых формул.

Для того, чтобы найти погрешность вычислений, надо воспользоваться формулами:

$$\Delta = \left| A_{\text{точн}} - A_{\text{прибл}} \right|$$

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \cdot 100\%$$

$$\overline{A}_{\text{точн}}$$

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_0^{\pi} \cos x dx$.

Решение: Разделим промежуток интегрирования на 5 частей. Тогда

$n = 5$; $b - a = 4$; $\Delta x = \frac{b - a}{5} = \frac{\pi}{20} \approx 0,1571$. Найдем значения подынтегральной функции (с точностью до 4-х знаков после запятой):

$$y_0 = \cos 0^\circ = 1,0000 ;$$

$$y_1 = \cos \left(\frac{\pi}{20} \right) = \cos 9^\circ = 0,9877 ; y_2 = \cos \left(\frac{\pi}{10} \right) = \cos 18^\circ = 0,9511 ;$$

$$y_3 = \cos \left(\frac{3\pi}{20} \right) = \cos 27^\circ = 0,8910 ; y_4 = \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) = \cos 36^\circ = 0,8090 ;$$

$$y_5 = \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0,7071 .$$

Тогда, по формуле прямоугольников (с недостатком):

$$A_{\text{прибл}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \approx 0,1571 \cdot (0,9877 + 0,9511 + 0,8910 + 0,8090 + 0,7071) = 0,7282$$

С другой стороны, по формуле Ньютона Лейбница:

$$A_{\text{точн}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

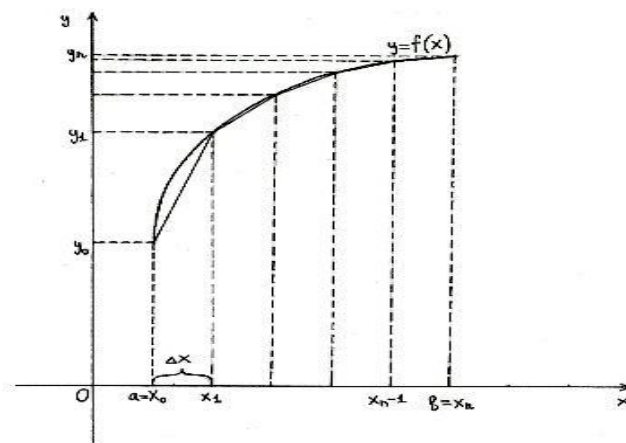
Найдем относительную погрешность вычисления по формуле прямоугольников:

$$\delta = \frac{\Delta}{\overline{A}_{\text{точн}}} \cdot 100\% = \frac{\left| 0,6827 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 100\% = 3,45\%$$

Метод трапеций

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right)$$



Пример 2. Вычислить по формуле трапеций $\int_0^5 \sqrt{x+4} dx$, при $n = 5$.

Решение: Промежуток интегрирования разделен на 5 частей, тогда

$\Delta x = \frac{b-a}{5} = 1$ и $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$. Найдем

значения подынтегральной функции (с точностью до 3-х знаков после

запятой): $y_0 = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0,5$; $y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \approx 0,447$; $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2+4}} \approx 0,409$;

$y_3 = \frac{1}{\sqrt{3+4}} \approx 0,377$; $y_4 = \frac{1}{\sqrt{4+4}} \approx 0,353$; $y_5 = \frac{1}{\sqrt{5+4}} = \frac{1}{3}$. Тогда по формуле

трапеций, получим:

$$A_{\text{прибл}} = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 1 \cdot (0,416 + 0,447 + 0,409 + 0,377 + 0,353) = 2,002$$

С другой стороны, по формуле Ньютона Лейбница:

$$A_{\text{точн}} = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} = (2\sqrt{x+4}) \Big|_0^5 = 6 - 4 = 2$$

Найдем относительную погрешность вычисления по формуле трапеций:

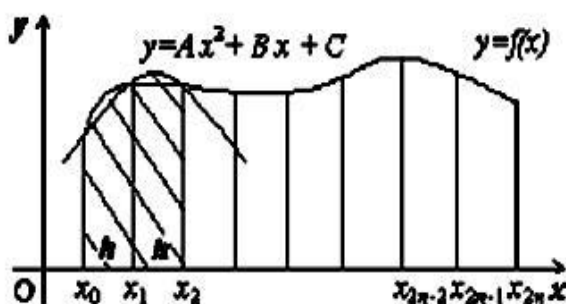
$$\delta = \frac{\Delta}{\left| \overset{A}{\underset{\text{точн}}{\Delta}} \right|} \cdot 100\% = \frac{|2 - 2,002|}{2} \cdot 100\% = 0,2\%$$

Метод Симпсона

Суть метода заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающие элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси Oy . Тогда криволинейную трапецию заменяют не суммой площадей прямолинейных фигур, как в предыдущих методах, а суммой площадей криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} (y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}))$$

где n - четное число.



Пример 3. Вычислить по формуле Симпсона $\int_1^4 x^2 dx$.

Решение: Разделим промежуток интегрирования на 10 равных частей. Тогда $\frac{b-a}{3n} = \frac{3}{30} = 0,1$. Подставляя в подынтегральную функцию $y = x^2$ значения аргумента: $x_0 = 1$; $x_1 = 1,3$; $x_2 = 1,6, \dots$, $x_{10} = 4$, найдем соответствующие значения ординат $y_0 = 1$, $y_1 = 1,69$; $y_2 = 2,56$; $y_3 = 3,61$; $y_4 = 4,84$; $y_5 = 6,25$; $y_6 = 7,84$; $y_7 = 9,61$; $y_8 = 11,56$; $y_9 = 13,69$; $y_{10} = 16$. Тогда, по формуле Симпсона получим:

$$A_{\text{прибл}} = \int_1^4 x^2 dx \approx 0,1 \cdot ((1 + 16) + 2(2,56 + 4,84 + 7,84 + 11,56) + 4(1,69 + 3,61 + 6,25 + 9,61 + 13,69)) = 21.$$

Вычисление по формуле Ньютона Лейбница дает:

$$A_{\text{точн}} = \int_1^4 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$$

Таким образом, при вычислении определенного интеграла по формуле Симпсона получено точное значение интеграла.

Тема 5.3 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Содержание материала: понятие о численном решении дифференциальных уравнений. Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение метода численного решения дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач.

Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера

Рассмотрим метод Эйлера, применяемый при приближенном решении дифференциальных уравнений.

Найдем приближенно решение уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (1)

на отрезке $[x_0, b]$, удовлетворяющее начальному условию при $x = x_0, y = y_0$. Разделим отрезок $[x_0, b]$ точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n равных частей (здесь $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$). Обозначим $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$, следовательно, $h = \frac{b - x_0}{n}$

Пусть $y = \varphi(x)$ есть некоторое приближенное решение уравнения (1) и

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), \dots, y_n = \varphi(x_n),$$

$$\text{Обозначим } \Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

В каждой из точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ в уравнении (1) производную заменим отношением конечных разностей:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \tag{2}$$

$$\Delta y = f(x, y) \Delta x \tag{3}$$

При $x = x_0$ будем иметь $\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0)$, $\Delta y_0 = f(x_0, y_0) \Delta x$ или $y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$.

В этом равенстве x_0, y_0, h известны, следовательно, находим: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$.

При $x = x_1$ уравнение (3) примет вид $\Delta y_1 = f(x_1, y_1) h$ или $y_2 - y_1 = f(x_1, y_1) h$, $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) h$.

Здесь известными являются x_1, y_1, h , а y_2 определяется. Аналогично находим;

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) h.$$

.....

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) h.$$

.....

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) h.$$

Таким образом, приближенные значения решения в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ найдены.



Соединяя на координатной плоскости точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots,$

(x_n, y_n) , отрезками прямой, получим ломаную-приближенное изображение интегральной кривой (рис.1)

Эта ломаная называется ломаной Эйлера.

Пример1. Найти приближенное при $x = 1$ значение решения уравнения $y' = y + x$, удовлетворяющего начальному условию: при x_0

$$=0 \quad y_0 = 1.$$

Решение: Разделим отрезок $[0,1]$ на 10 частей точками $x_0 = 0; 0,1; 0,2; \dots, 1$. Следовательно, $h = 0,1$.

Значения y_1, y_2, \dots, y_n будем искать по формуле(3)

$$\Delta y_k = (y_k + x_k)h \quad \text{или}$$

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)h$$

Таким образом, получаем:

$$y_1 = 1 + (1 + 0) \cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1,$$

$$y_2 = 1,1 + (1,1 + 0,1) \cdot 0,1 = 1,21$$

.....

В процессе решения составляем таблицу:

x_k	y_k	$y_k + x_k$	$\Delta y_k = (y_k + x_k) \cdot h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0,1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0,2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0,3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0,4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0,5$	1,7164	2,2164	0,2216
$x_6 = 0,6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0,7$	2,1918	2,8918	0,2812
$x_8 = 0,8$	2,4730	3,2730	0,3273
$x_9 = 0,9$	2.8003	3.7003	0,3700
$x_{10} = 1.0$	3.1703		

Мы нашли приближенное значение $y|_{x=1} = 3,1703$. точное решение данного уравнения. Удовлетворяющее указанным начальным условиям, будет $y = 2\ell^x - x - 1$.

Следовательно, $y|_{x=1} = 2(\ell - 1) = 3,4365$ Абсолютная погрешность; 0,2662; относительная погрешность

$$\frac{0,2662}{3,4365} = 0,077 \approx 8\%$$

Задания к контрольной работе Вариант № 1

1. Решить дифференциальное уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0$.
2. Число 43_{10} перевести в двоичную, восьмеричную системы счисления
3. Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{16 - x^2}$
4. Построить график функции $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ с помощью преобразований.
5. Изобразить геометрически область комплексных чисел, заданную неравенством: $|z + 1 - i| > 2$
6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = -6x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -8$.

Вариант № 2

1. Вычислить определитель:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$
2. Используя формулу Маувра вычислить в показательной форме $(2 + 2\sqrt{3}i)^4$
3. Исследовать функцию $y = x^4 - 2x^3 + 1$ на выпуклость и точки перегиба с помощью производной.
4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 5 - 4x + x^2$ в т. $x_0 = -1$.
5. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 3x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 10$
6. Число 26_{10} перевести в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

Вариант № 3

1. Число $a = \frac{4}{1 - \sqrt{3}i}$ представить в алгебраической форме, изобразить геометрически.
2. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{7x}\right)^{2x}$
3. Изобразить геометрически область комплексных чисел, заданную неравенством: $-2 \leq \operatorname{Im} z < 1$
4. Найти асимптоты к графику функции $y = \frac{1}{x^2 - 9}$
5. Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$
6. Вычислить углы, образуемые при пересечении графиков двух функций:
 $y = x^2 + 5x - 5$ и $y = 3x - 2$

Вариант № 4

1. Число 54_{10} перевести в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.
2. Найти точки разрыва функции $y = 6^{\frac{5}{x-3}} - 2$ и определить их характер.
3. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = -6x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -8$.
4. Построить график функции $y = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ с помощью преобразований.
5. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 5x - 6$ в т. $x_0 = -3$.
6. Исследовать функцию $y = x^3 - 7x^2 - 5x + 11$ на выпуклость и точки перегиба с помощью производной

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Формулы сокращенного умножения

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

2. Таблица значений тригонометрических функций

α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α (deg)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot α	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

3. Таблица арктангенсов

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
arctg x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1};$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$
4. $(e^x)' = e^x;$
5. $(a^x)' = a^x \ln a;$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$
8. $(\sin x)' = \cos x;$
9. $(\cos x)' = -\sin x;$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
15. $(\operatorname{ar cctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$

5. Табличные интегралы

$$1. \int dx = x + C$$

$$2. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$4. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$11. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Основные источники:

- 1.1 Богомолов Н.В. Математика: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Математика : учебник для СПО / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 396 с. — Режим доступа: - URL: <https://www.biblio-online.ru/book/F7C570BC-85B6-4E2D-9B5A-4CB297E61C8E>
- 1.2 Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М.: Юрайт, 2013. или [Электронный ресурс]: Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 285 с. — Режим доступа: - URL: <https://www.biblio-online.ru/book/B2077BBB-EF95-4E5F-AFE1-9AAB6EB69A17>

2. Дополнительные источники:

2.1 Дорофеева, А. В. Математика. Сборник задач : учебно-практическое пособие для среднего профессионального образования / А. В. Дорофеева. — 2-е изд. — М.: Издательство Юрайт, 2020. — 176 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08796-3. — URL : <https://urait.ru/bcode/449051>

2.2 Дегтярева, О.М. Краткий теоретический курс по математике для бакалавров и специалистов: учебное пособие / О.М. Дегтярева, Г.А. Никонова; Министерство образования и науки России, ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань: Издательство КНИТУ, 2013. - 136 с.: ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1523-5; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=427858](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=427858)

2.3 Зализняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике: учебное пособие / В.Е. Зализняк, Г.И. Щепановская; Министерство образования и науки РФ, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. - 174 с.: табл. - ISBN 978-5-7638-2498-8; То же [Электронный ресурс]. - URL: [//biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229271](http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229271)

3. Интернет-ресурсы:

- 3.1 ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: <http://biblioclub.ru/>
- 3.2 Электронная библиотечная система «Лань»: <http://e.lanbook.com/>
- 3.3 Сайт: [http:// shool-collection.edu.ru](http://shool-collection.edu.ru)
- 3.4 «Квант». Форма доступа: www.kvant.mirror1.mccme.ru