ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Иркутский государственный университет путей сообщения»

Сибирский колледж транспорта и строительства

# СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

для специальности 09.02.06 Сетевое и системное администрирование

*базовая подготовка*

*среднего профессионального образования*

Иркутск 2022 г.

РАССМОТРЕНО:
Цикловой методической
Комиссией Математики
Председатель ЦМК: _____/Т.П. Новикова
«08» июня 2022 г.

Составитель: Убоженко Г. Г., преподаватель высшей категории, Сибирский колледж транспорта и строительства ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения».

Содержание:

Предисловие

Сборник задач содержит задания для практических работ, предназначенных для более глубокого изучения дисциплины; систематизации и закрепления полученных знаний и практических умений; углубления и расширения теоретических и практических знаний; формирования умений использовать специальную, справочную литературу, а так же содержит методические указания по выполнению предложенных заданий и список литературы, необходимой для изучения дисциплины.

Использование данного сборника задач в учебном процессе позволит каждому студенту освоить теоретический материал, даст возможность применить полученные знания на практике.

**Указания к оцениванию практических работ**

Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения практических работ производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

| Процент результативности (правильных ответов) | Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений | |
|---|---|---|
| | балл (отметка) | вербальный аналог |
| 90 – 100 | 5 | отлично |
| 80 – 89 | 4 | хорошо |
| 70 – 79 | 3 | удовлетворительно |
| менее 70 | 2 | неудовлетворительно |

Практическая работа № 1 «Вычисление вероятности случайного события»

Цель работы: формировать умение вычислять вероятности случайного события. Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

|| Знать:

– классическое определение вероятности;

– методику вычисления вероятностей событий по классической формуле определения вероятности с использованием элементов комбинаторики

||Уметь:

– вычислять вероятности событий по классической формуле определения вероятности

Вопросы к теме

1. Что является необходимым условием случайного события?

……

……

……

2. Как связаны вероятность и частота? Ответ обосновать.

……

……

……

3. Известно, что при трех подбрасываниях монеты герб выпал дважды. Можно ли утверждать, что частота появления события *А – при подбрасывании монеты выпал герб* равна 2/3? Ответ обосновать.

……

……

4. Чем отличаются несовместные случайные события и противоположные события? Что в них общего?

……

……

……

5. Если вероятность события равна единице, то является ли событие А достоверным? Ответ обосновать.

……

……

6. Вероятность достоверного события не меньше единицы? Ответ обосновать.

……

7. Какую размерность имеет частота? Ответ обосновать.

……

……

Задачи к практической работе

Задача № 1

Слово МАТЕМАТИКА составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.

Дано: ……

……
……

Найти: ……

Решение:

Испытание заключается в вынимании карточек с буквами в случайном порядке без возврата. Элементарным событием является полученная последовательность букв. Событие А состоит в получении нужного слова **МАТЕМАТИКА**. Элементарные события являются перестановками из 10 букв, значит, **n** найдем по формуле перестановок.

**n =** ……

Некоторые буквы в слове МАТЕМАТИКА повторяются:

**М** - ..... раза, **А** - ..... раза, **Т** - ..... раза, поэтому возможны перестановки, при которых слово не изменяется. Две буквы **М** можно переставить ..... способами, три буквы **А** можно переставить ..... способами, две буквы **Т** можно переставить ..... способами.

Количество элементарных событий **m**, входящих в состав события А равно произведению числа перестановок количества повторяющихся букв.

**m =** ……

Вероятность события $A$ равна: $P(A) = \frac{m}{n} =$

……

Ответ:

……

Задача № 2

На рынке представлено 8 различных пакетов программ для бухгалтерии с приблизительно равными возможностями. Для апробации в своих филиалах фирма решила отобрать 3 из них. Сколько существует способов отбора 3-х программ из 8-ми, если отбор осуществляется в случайном порядке? Какова вероятность того, что среди отобранных случайно программ окажется 3 программы, занимающие наименьший объём памяти?

Дано*:* ……
……
……

Найти: ……

Решение:

Испытание состоит в том, чтобы из 8-ми программ выбрать 3. Порядок выбора программ не важен, повторяться они не могут, поэтому для подсчета числа способов выбора 3-х программ из 8-ми воспользуемся формулой сочетаний из 8 по 3.

$N = C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$

……

Найдем вероятность события А – среди отобранных случайно окажется 3 программы, занимающие наименьший объём памяти.

Число равновозможных исходов опыта равно числу способов отбора 3-х программ из 8-ми предложенных. Тогда n = ……

Число благоприятствующих исходов $m$ = ....., так как отобрать 3 программы, занимающие наименьший объём памяти можно только одним способом.

Тогда $P(A) = m/n =$ ……

Ответ: $N$ = ....., $P(A)$ = .....

Задача № 3

В группе 5 отличников и 12 хорошистов. На конференцию из них наудачу выбирают 2-х человек. Чему равна вероятность того, что:

1) будут выбраны только отличники; 2) выбраны только хорошисты?

Дано: всего ……, …… – отличников, …… – хорошистов.

Испытание – ……

Событие А – ……

Событие В – ……

Найти: Р (А ), Р (В ).

Решение:

Решим задачу по формуле классического определения вероятности: ……

Число равновозможных исходов найдем в соответствии с испытанием: всего ……, выбирают из них ……. По формуле сочетаний из …….. по ……. найдем n.

Тогда $n = C\ldots = \frac{\cdot}{\cdot} =$ ……

Число благоприятствующих исходов найдем в соответствии с заданными событиями.

Событие А – …… Всего ……, выбирают из них ……...

По формуле сочетаний ……. найдем m. Тогда

$m = C\ldots = \frac{\cdot}{\cdot} =$ ……

Вероятность события А равна: $P(A) = \frac{m}{n} =$ ……

Событие В – ……

Число равновозможных исходов

……

Число благоприятствующих исходов

……

Вероятность события В равна: $P(B) = \frac{m}{n} =$ ……

Ответ: $P(A) =$ ……, $P(B) =$ ……

Практическая работа № 2 «Вычисление вероятностей сложных событий»

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

-понятия произведения событий и суммы событий;
формулу вероятности произведения независимых событий;
–формулу вероятности суммы несовместных событий

Уметь:

– представлять сложные события через элементарные события с помощью операций над событиями;
– вычислять вероятности сложных событий

Вопросы к теме

1. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
……
2. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
……
3. Сформулируйте теорему о вероятности суммы совместных событий.
……
4. При каком условии вероятность суммы двух случайных событий равна сумме вероятностей этих событий?
……
5. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
……
6. Сформулируйте теорему о вероятности произведения независимых событий.
……
……
7. При каком условии вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятностей этих событий?
……

Задачи к практической работе

Задача № 1

В урне 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется:
а) 2 белых шара; б) меньше чем 2 белых шара;
в) хотя бы один белый шар.

Дано: ……
……
……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

Решим задачу по формуле классического определения вероятности: ……

Число равновозможных исходов найдем в соответствии с испытанием: всего ……., выбирают из них ……. По формуле …….. из ……. по ……. найдем n. Тогда n = ……

а) А - среди вынутых шаров 2 белых. Значит, среди вынутых шаров 2 белых и 2 черных. *A* = ……

Число исходов события *A* найдем по формуле $m = m_1 \cdot m_2$, где $m_1$ – число способов выбрать 2 белых шара, а $m_2$ - число способов выбрать 2 черных шара. И белые, и черные шары берут одновременно, поэтому число способов выбора шаров перемножаем.

Белых шаров 6, берут из них 2, значит $m_1$ = ……

Черных шаров ....., берут из них ....., значит $m_2$ = ……

$m = m_1 \cdot m_2$ =…….....

Вероятность события *A* равна: $P(A) = \dfrac{m}{n}$ = ……

б) В - среди вынутых шаров меньше чем 2 белых. Это событие состоит из двух несовместных событий:

$B_1$ - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных.

$B_2$ - среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные.

Так как события $B_1$ и $B_2$ несовместны, можно использовать формулу:

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2)$$

Вероятности событий $B_1$ и $B_2$ по формуле классического определения вероятности:

……Число исходов события $B_1$ найдем по формуле $m = m_1 \cdot m_2$, где $m_1$ – число способов выбрать 1 белый шар, а $m_2$ - число способов выбрать 3 черных шара. Белых шаров 6, берут из них 1, значит $m_1$ = ……

Черных шаров ....., берут из них ....., значит

$m_2$ = …… $m = m_1 \cdot m_2$ =……

$B_2$= {4 черных} Черных шаров ...., берут из них ....., значит *m* = ……..

Вероятности событий $B_1$ и $B_2$ равны: $P(B_1) =$ …… $P(B_2) =$ …… $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$ = ……

в) *C* – среди вынутых шаров хотя бы один белый. Здесь событие С определяется словами "хотя бы один" и прямое решение приводит обычно к сложным вычислениям. Этому событию удовлетворяют следующие сочетания шаров: 1 белый и 3 черных ($C_1$), 2 белых и 2 черных ($C_2$), 3 белых и 1 черный ($C_3$), 4 белых ($C_4$). Имеем: $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Для вычисления вероятности события *C* необходимо найти вероятности четырёх событий $C_1, C_2, C_3, C_4$.

Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем вычислить вероятность искомого события.

Противоположным событию *C* является событие $\overline{C}$ - *среди вынутых шаров нет ни одного белого*, $\overline{C}$ = {4 черных} = $B_2$

$P(\overline{C}) = P(B_2) =$ ……

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) =$ ……

Ответ*:* ……, ……., ……..

Задача № 2

Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени Т безотказно соответственно с вероятностями 0,851, 0,751 и 0,701. Найти вероятность того, что за время Т выйдет из строя: а) только один элемент; б) хотя бы один элемент.

Дано: ……

……

……

……

……

Найти: ……

Решение:

Дано сложное испытание – работа устройства, состоявшего из 3-х элементов. Испытание, т.е. работу за время **Т** нужно рассмотреть на двух уровнях: на уровне устройства и на уровне элементов.

Введем элементарные события: $B_i$ – i-ый элемент не выходит из строя; $\overline{B}_i$ - i-ый элемент выходит из строя.

а) *А – за время Т выходит из строя только один элемент.*

Выразим А, через элементарные события. Событие А происходит тогда, когда выходит из строя либо только 1-й, либо только 2-й, либо только 3-й элемент.

*А = {НРР, РНР, РРН}* = ……

Учитывая независимость элементов устройства, несовместимость событий $B_i$ *и* $\overline{B}_i$ применим теоремы сложения и умножения вероятностей *P(A)* = …….....

Вероятности элементарных событий $B_i$ определять не надо, так как эти вероятности заданы по условию.

$P(B_1) = p_1 =$ ……....., $P(B_2) = p_2 =$ ……....., $P(B_3) =$ …….

$B_i$ и $\overline{B}_i$ - противоположные события. $P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) =$ …….

……

……

Вычислим вероятность события А.

*P(A)* = …….....

……

б) *В – за время **Т** выходит из строя хотя бы один элемент.*

Событие определяется словами "хотя бы один", значит, используем противоположное событие $\overline{B}$ *- за время **Т** все элементы работают безотказно.* $\overline{B}$ = { РРР} = …….

Найдем вероятность события $\overline{B}$ :

……

*P(B)* = …….

Ответ: ……

## Практическая работа №3. Применение формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

|| Знать:

– формулу полной вероятности;
– формулу Байеса

|| Уметь:

– находить полную вероятность;
– находить вероятности гипотез

Вопросы к теме

1. Может ли вероятность произведения двух событий быть равной произведению вероятностей этих событий?
……
2. Если сумма вероятностей событий равна 1, можно утверждать, что они образуют полную группу? ……
3. Можно ли утверждать, что сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице?
……
4. Образуют ли два противоположных события полную группу событий?
……
5. Пусть $U$ и $V$ – соответственно достоверное и невозможное события. Чему равна вероятность суммы этих событий?
……
6. Пусть $U$ и $V$ – соответственно достоверное и невозможное события. Чему равна вероятность произведения этих событий?
……
7. При каком условии применяют формулу полной вероятности?
……

Задачи к практической работе

Задача № 1

В пирамиде стоят 19 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 0,81, а стреляя из винтовки без оптического прицела, с вероятностью 0,46. Найти вероятность того, что стрелок поразив мишень, стрелял из винтовки с оптическим прицелом.

Дано: ……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

А – стрелок поразит мишень – это событие может произойти только с одной из гипотез

$B_1$ – стрелок возьмет винтовку с оптическим прицелом;
$B_2$– стрелок возьмет винтовку без оптического прицела.

Найдем вероятности гипотез. По формуле классического определения вероятности
$P(B_1)$ =……..
$P(B_2)$ =……..

Условные вероятности выпишем из условия задачи.
$P(A/B_1)$ = …….. $P(A/B_2)$ = ……

Используем формулу полной вероятности.
$P(A) = P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2)$ = ……..
……
По формуле Байеса вычисляем условную вероятность гипотезы $B_1$.
……
……
Ответ: ……

Задача № 2

На химическом заводе уставлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация, звуковой сигнал срабатывает с вероятностью 0,950. Звуковой сигнал может сработать случайно и без аварийной ситуации с вероятностью 0,02. Реальная вероятность аварийной ситуации равна 0,004. Известно, что звуковой сигнал сработал. Чему равна вероятность реальной аварийной ситуации?

Дано: ……
……
……
……
Найти: ……
Решение:

Рассмотрим событие ***A*** – *сигнал сработал*. Это событие может произойти только с одной из гипотез $B_i$ ( $i$ =1,2 ):
$B_1$ – есть аварийная ситуация;
$B_2$ – нет аварийной ситуации;

Тогда по формуле полной вероятности вероятность события *A* будет равна
$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2)$
$P(B_1)$ – это вероятность реальной аварийной ситуации. Она известна по условию.
$P(B_1)$ = ……..
$B_1$ и $B_2$ – два взаимно противоположных события.
$P(B_2)$ = ……..

Запишем условные вероятности события ***A***.
……
……

Используя установленные вероятности, определим вероятность события *A*: $P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2)$ =
……
……

Найдем вероятность реальной аварийной ситуации в том случае, если звуковой сигнал сработал по формуле Байеса.
……

……

Ответ:……

Практическая работа №4. Повторение испытаний.

Дидактическая цель**.** Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

–понятие схемы Бернулли;

–формулу Бернулли;

– приближенные формулы в схеме Бернулли

Уметь:

– вычислять вероятности событий в схеме Бернулли

Вопросы к теме

1. Какими должны быть испытания, чтобы можно было применить формулу Я. Бернулли?

……

2. Перечислите фундаментальные условия схемы независимых испытаний.

……

……

3. Объясните значение всех символов в формуле Я. Бернулли.

……

……

4. Запишите формулу вычисления вероятности события в схеме независимых испытаний, если: а) событие произошло ровно $k$ раз;

……

б) событие произошло от $k$ до $m$ раз;

……

……

в) менее 2-х раз;

……

г) не более 2-х раз.

……

……

5. При каких условиях можно применять закон Пуассона?

……

6. Записать формулу Пуассона и объяснить значение символов в этой формуле.

……

……

7. Чему равен параметр $\lambda$ в этой формуле?

……

8. При каких условиях можно применять формулу Лапласа?

……

……

9. Записать формулу Лапласа и объяснить значение символов в этой формуле.

……

……

10. Как находить значения функции для отрицательного аргумента в локальной формуле Лапласа?

……

……

11. Как находить значения функции для аргумента больше или равного 4-м в локальной формуле Лапласа?

……

Задачи к практической работе

Задача № 1

Вероятность приёма радиосигнала при каждой передаче равна 0,8. Найти вероятность того, что при шестикратной передаче сигнал будет принят:
1) четыре раза; 2) не менее четырех раз; 3) не более одного раза.
Найти наивероятнейшее число принятых сигналов.

Дано: ……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

Испытание – передача сигнала. «Успех» - сигнал будет принят.

*1) B* – сигнал будет принят четыре раза

Пространство исходов события $B = \{ 6(4) \}$, тогда $P(B) = P_6(4)$.

Применим формулу Бернулли.

……
……

*2) C* – сигнал будет принят не менее четырех раз.

*C* – «не менее четырех раз», означает, что сигнал будет принят 4, 5 или 6 раз. Пространство исходов события $C = \{ 6(4), 6(5), 6(6) \}$, тогда

$P(C) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$.

$P_6(4)$ = … ……

$P_6(5)$ = ……

$P_6(6)$ = ……

$P(C) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$ = ……

*3) D* – сигнал будет принят не более одного раза

*D* – «не более одного раза», означает, что сигнал будет принят один раз или ни разу. Пространство исходов события $D = \{ 6(0), 6(1) \}$, тогда $P(D) = P_6(0) + P_6(1)$.

$P_6(0)$ = … ……

$P_6(1)$ = ……

$P(D) = P_6(0) + P_6(1)$= ……

*4)* Наивероятнейшее число успехов находится в интервале

$np - q \le k \le np + p$.

……

Задача № 2

В каждом из 700 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие А происходит:
а) точно 270 раз; б) хотя бы один раз.

Дано: ……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

а) Найдем вероятность того, что событие А происходит точно 270 раз
Число испытаний достаточно велико, проверим значение $n \cdot p$ и сравним его с числом 10: $n \cdot p$ = ……, следовательно необходимо применять …….
По условию: $n$ = ……, $p$ = ……, $m$ = ……, $q = 1 - p$ = ….....
Вычислим $npq$ =……, $\sqrt{npq}$ = ……
$m - np$ =……,тогда $u = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ = ……,
По таблице 1 приложения находим $f$(_____)= _____.
Подставим найденные значения в формулу Муавра-Лапласа: $P_{700}(270)$ =
……
*б) Найдем вероятность того, что событие А происходит хотя бы один раз*. Для быстрого вычисления вероятности этого события введем событие ему противоположное – $\overline{B}$ – событие не произойдет ни разу, то есть число появлений события равно нулю.
P( $\overline{B}$ ) = $P_{700}(0)$ , тогда P(B) = 1 – P( $\overline{B}$ )
Найдем $P_{700}(0)$
m – np =……,тогда
$u = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ =……..…,
известно, что $f(-u) = f(u)$ По таблице 1 приложения находим $f$(_____)= _____.
Подставим найденные значения в формулу Муавра-Лапласа: $P_{700}(0)$ =
……
$P(B) = 1 - P(\overline{B})$= ……
Ответ: ……

Задача 3

На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью 1/200. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет:
а) точно 1 неправильное соединение;
б) меньше чем 3 неправильных соединения;
в) больше чем 2 неправильных соединения.

Дано: ……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

Число испытаний велико, а вероятность события *А* мала. Проверим условие применимости асимптотической формулы Бернулли. Найдем произведение *np* и сравнить его с числом 10.
Найдем произведение *np* = .....*10*, поэтому формулу Бернулли необходимо заменить приближенной формулой .....

$$P_{n(m)} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np.$$

Событие *A – точно 1 неправильное соединение.*
Пространство исходов события $A = \{ 200(1) \}$, тогда $P(A) = P_{200}(1)$
$np$ = ....., следовательно, $\lambda$ = ....., а $m$ = .....
$P(A) = P_{200}(1)$ = .....
Событие *B – меньше чем 3 неправильных соединения.*
Пространство исходов события $B = \{ 200(0), 200(1), 200(2) \}$, тогда
$P(B) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2)$
Найдем $P_{200}(0)$ и $P_{200}(2)$
$P_{200}(0)$ = ……
$P_{200}(2)$= ……
$P(B)$ = ……
*Событие C – больше чем 2 неправильных соединения*
Пространство исходов события $C = \{ 200(3), 200(4), 200(5),....., 200(200)\}$
Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем вычислить вероятность искомого события.

Противоположным событию $C$ является событие $\overline{C}$ - *неправильных соединений меньше 3-х:* $\overline{C} = \{200(0), 200(1), 200(2)\} = B$,
$P(C) = 1 - P(B)$ = ……

Ответ: ……

Практическая работа № 5. Построение закона распределения дискретной случайной величины. Вычисление основных числовых характеристик.

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:
- понятие ДСВ;
– понятие ряда распределения ДСВ
– законы распределения ДСВ: биномиальный, Пуассона.
– свойства законов распределения ДСВ

Уметь:
-– записывать ряд распределения ДСВ, заданной содержательным образом

Вопросы к теме

1. Какая величина называется случайной?
……
……
2. Какая случайная величина называется дискретной? Приведите примеры дискретной случайной величины.
……
……
3. Какая случайная величина называется непрерывной? Приведите примеры непрерывной случайной величины.
……
……

4. Что называется законом распределения дискретной случайной величины?
……
……
5. Объясните что такое "многоугольник распределения вероятностей". Как его построить?
……
……
6. Перечислить комплекс условий биномиального закона.
……
……

……
7. Перечислить комплекс условий закона Пуассона.
……
……

Задачи к практической работе

Задача № 1

В партии из 8 деталей пять стандартных. Наудачу взяты четыре детали. Построить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Дано: Испытание – ……

Случайная величина X – ……

Найти: закон распределения случайной величины X.

Решение:

Пусть *X – число стандартных деталей среди отобранных.*

Всего ..... деталей, из них ..... стандартных и ..... нестандартных. Взять 4 нестандартных деталей невозможно, так как их всего три. Поэтому случайная величина может принимать следующие четыре значения: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 4.$ Для определения вероятности появления конкретного числа стандартных деталей введем события $A_i$ – из *4-х* деталей *i* стандартных.

Число исходов опыта $n = C_8^4 =$ ……

Если $x_1 = 1$, то произошло событие $A_1$ – из *4-х* деталей *1* стандартная.

Число исходов события $A_1$ $m = m_1 \cdot m_2 = C_5^1 \cdot C_3^3 = 5 \cdot 1 = 5$

Следовательно, $P(X = 1) =$ ……

Если $x_2 = 2$, то произошло событие $A_2$ – из *4-х* деталей ……

Число исходов события $A_2$ $m = m_1 \cdot m_2 =$ ……

Следовательно, $P(X = 2) =$ ……

Если $x_3 = 3$, то произошло событие $A_3$ – ……

Число исходов события $A_3$ ……

Следовательно, $P(X = 3) =$ ……

Если $x_4 = 4$, то произошло событие $A_4$ – ……

Число исходов события $A_4$ ……

Следовательно, $P(X = 4) =$ ……

Контроль - $\sum_{i=1}^{4} p_i =$ ……

Искомый ряд распределения имеет вид:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | | | | |
| $p_i$ | | | | |

Задача №2

В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой

Дано: Испытание – ……

……..……

Случайная величина X – ……

Найти: закон распределения случайной величины X

Решение:

Пусть *X* – ……

Случайная величина может принимать следующие значения ……. ……

Случайная величина распределена по закону ……..

Число испытаний *n* равно ……

Вероятность «успеха» - это вероятность того, что ……. ……

По условию поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Вероятность того, что случайно выбранная пара обуви изготовлена первой фабрикой, равна $p = 2 / (2 + 3) =$ ....., $q = 1 - p =$ ……

Число «успехов» равно *m*, и меняется в соответствии со значениями случайной величины.

$x_1 = 0$, событие $A_0$ – ни одна пара не изготовлена 1-й фабрикой.

$P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^{4-0} =$ ……

$x_2 = 1$, событие $A_1$ – одна пара ……

$P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1 p^1 q^{4-1} =$ ……

$x_3 = 2$, событие $A_2$ – …….

$P(X = 2) = P_4(2) =$ ……

$x_4 = 3$, событие $A_3$ – …….

$P(X = 3) =$ …….

$x_5 =$ ...., событие …….

$P(X = 4) =$ …….

Контроль:

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 =$ ……

И так искомый закон распределения имеет вид:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | | | | | |
| $p_i$ | | | | | |

Случайная величина $X$ – число пар обуви среди четырех, изготовленных первой фабрикой, имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n$ = …….., $p$ = ……..

Практическая работа № 6 Построение функции плотности и интегральной функции распределения непрерывной случайной величины. Вычисление числовых характеристик НСВ.

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

• Знать:

– определение и свойства функции плотности НСВ;

– определение и свойства интегральной функции распределения НСВ;

–связь между интегральной функцией распределения и формулой плотности

• Уметь:

– находить функцию плотности по интегральной формуле распределения НСВ;

– вычислять вероятности для НСВ по её функции плотности и интегральной функции распределения

Вопросы к теме

1. Дать определение функции распределения вероятностей.

……...……

2. Дайте геометрическую интерпретацию функции распределения.

……...……

3. Перечислите свойства функции распределения.

……...……

4. Дайте определение дифференциальной функции распределения.

……...……

5. Что такое кривая распределения?

……...……

6. Геометрический смысл вероятности попадания значения случайной величины в заданный интервал.

……...……

7. Перечислите свойства дифференциальной функции распределения.

……...……

……...……

Задачи к практической работе

Задача № 1

Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0; при\ x\le 0\\ \dfrac{x}{3}; при\ 0<x\le 3\\ 1; при\ x>3\end{cases}$$

Найти функцию плотности вероятности $f$(x) случайной величины X.

Построить график $f$(x) и F(x).

Найти вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значения:

а) равное 1; б) не более 1; в) в интервале от 1 до 2.

Решить задачу двумя способами: используя F(x) и $f$(x).

Изобразить указанные вероятности на графиках F(x) и $f$(x).

Решение

Найдем функцию плотности вероятности $f$(x) случайной величины X.

Функцию вероятности вычислим по формуле $f(x) = F'(x)$.

Если $x \le 0$; то $F(x) = 0$; тогда $f(x) = F'(x) = (0)' = 0$.

Если $0 < x \le 3$; то $F(x) =$……, тогда $f(x) = (.....)' =$ ……..

Если $x > 3$, то $F(x) =$ …, тогда $f(x) = (.....)' =$ ……

Запишем функцию плотности

$$f(x) = \begin{cases} 0; & при\ x \le 0 \\ .....; & при\ 0 < x \le 3 \\ .....; & при\ x > 3 \end{cases}$$

Построим графики $F(x)$ и $f(x)$.

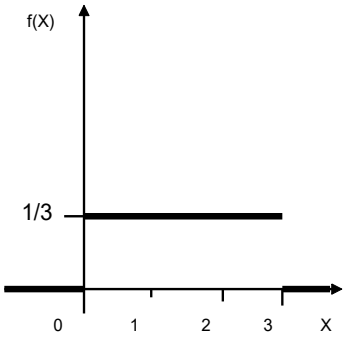



рис. 1

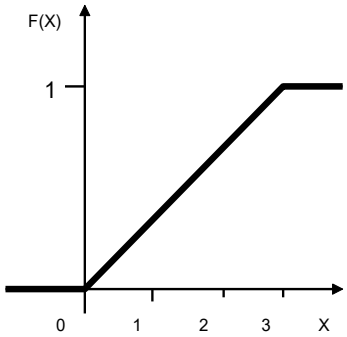



рис. 2

*а)* Найдем вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение равное *1*.

Найдем $P(X =$ ……$)$.

Т. к. случайная величина $X$ - непрерывна, то вероятность отдельно взятого значения равна нулю, т.е. $P(X =$ …..$) =$ …….

б) Найдем вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение не более *1*.

$P(X \le$ …..$)$ найдем по формуле $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

$$P(-\infty \le X \le 1) = P(0 \le X \le 1) = F(...) - F(...) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

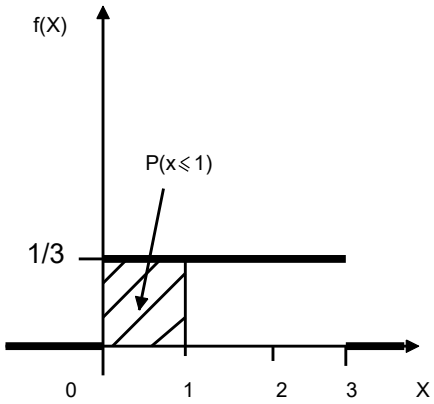
Решим задачу 2-м способом. Воспользуемся формулами:

$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$; $\int dx = x + C$, Получим:

$$P(-\infty \le X \le 1) = \int_{-\infty}^{1} ..... dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вывод: оба ответа совпадают.

Изобразим полученную вероятность на графиках **F(x)** и ***f*(x)**.



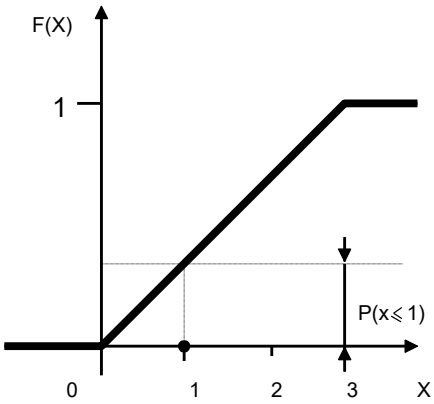




Рис. 3 Рис. 4

На рис.3 $P\ (X \le 1)$ это площадь под кривой распределения $f(x)$ на отрезке *[0; 1]*.
На рис. 4 $P(x \le 1)$ это ордината точки $F(1)$

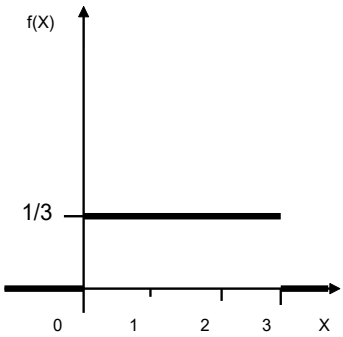
в) Найдем вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение в интервале от *1* до *2*.

$P(1 \le X \le 2) = F(2) - F(1) =$ .....

или

$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 f(x)\,dx = \text{.....}$$

Изобразим полученную вероятность на графиках **F(x)** и ***f*(x)**.



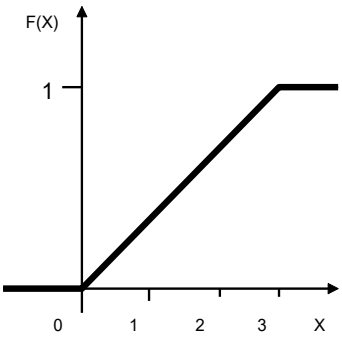




Рис 5. Рис 6.

На рис. 5 $P(1 \le X \le 2)$ это площадь под кривой распределяется на отрезке *[1; 2];*
На рис. 6 $P(1 \le X \le 2)$ это приращение ординаты графика $P(x)$ на отрезке *[1; 2]*.

Задача № 2

Случайная величина X задана функцией плотности вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0; при\ x \le 0 \\ \dfrac{x}{2}; при\ 0 < x \le 2 \\ 0; при\ x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x) случайной величины X.
Построить график $f$(x) и F(x).
Вычислить $P(1 \le X \le 2)$

Изобразить на графиках $f$(x) и F(x) найденную вероятность. Отметить на графике F(x), то значение случайной величины X, при котором она имеет наибольшую вероятность.

Решение

Функцию распределения *F(x)* непрерывной случайной величины найдем по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Область определения дифференциальной функции *f(x)* непрерывна, но функция задана различными аналитическими выражениями на разных интервалах.

Если x $\leq 0$, тогда *f(x) = 0* и $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt$ .....

Если $0 < x \leq 2$, то $f(x) =$ .....; следовательно $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} ..... \, dt =$

.....

Если $x > 2$ , то *f(x)* = ..... и, следовательно, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{2} \frac{t}{2}\, dt + \int_{2}^{x} 0\, dt =$

.....

Таким образом, искомая функция

$$F(x) = \begin{cases} .....; при\ x \leq 0 \\ .....; при\ 0 < x \leq 2 \\ .....; при\ x > 2 \end{cases}$$

Построим графики функции

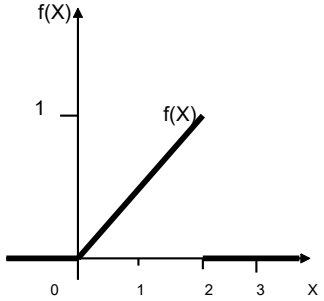



Рис 7.

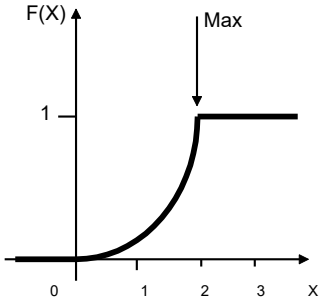



Рис 8.

Наибольшую вероятность *F(x)* имеет при *x* = .....

Вычислим $P(1 \leq X \leq 2)$ .....

.....

Ответ: .....

Задача 3

Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le -1\\ Cx+\frac{3}{4} & при -1<x\le \frac{1}{3}\\ 1 & при\ x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Решение

Найдем коэффициент С.

При *x = 1/3, F(1/3) = 1*, т.е.

$C\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=1,$ …….

Тогда функция распределения примет вид:

$$F(x)=\begin{cases}..... & при\ x\le -1\\ .....x+\frac{3}{4} & при -1<x\le \frac{1}{3}\\ ..... & при\ x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

Найдем вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$P(-\frac{1}{3}\le X\le\frac{1}{3})=F(\frac{1}{3})-F(-\frac{1}{3})$ .....

Ответ: .....

## Практическая работа № 7 «Построение полигона и гистограммы. Вычисление числовых характеристик выборки».

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Иметь понятие:

– о сущности выборочного метода

Знать*:*

– понятие вариационного ряда;

– понятие полигона и гистограммы, методику их построения;

– числовые характеристики выборки и методику их расчета

Уметь:

– строить для данной выборки её графическую диаграмму;

– рассчитывать по заданной выборке её числовые характеристики

Вопросы к теме

1. Дайте определение генеральной совокупности. Приведите примеры.
……
……
2. Дайте определение выборочной совокупности. Приведите примеры.
……
3. Какая выборка называется представительной?
……
4. Что называется вариационным рядом?
……
5. Что такое вариант?
……
6. Что называется частостью?
……

Задачи к практической работе

Задача № 1

При обследовании 50 членов семей рабочих и служащих установлено следующее количество членов семьи:
5;3;2;1;4;6;3;7;9;1;3;2;5;6;8;2;5;2;3;6;8;3;4;4;5;6;5;4;7;5;6;4;8;7;4;5;
7;8;6;5;7;5;6;6;7;3;4;6;5;4.

1) Составьте вариационный ряд распределения частот.

2) Постройте полигон распределения частот.

3) Определите средний размер (среднее число членов) семьи.

4)Охарактеризуйте колеблемость размера семьи с помощью показателей вариации (дисперсии, среднего квадратического отклонения, коэффициента вариации).

Решение.

1) В данной задаче изучаемый признак является дискретно варьирующим, так как размер семей не может отличаться друг от друга менее чем на одного человека. Следовательно, необходимо построить дискретный вариационный ряд. Чтобы сделать это, необходимо подсчитать, сколько раз встречаются те или иные значения признака, и расположить их в порядке возрастания или убывания. Значения изучаемого признака - размер семьи - обозначим $x_{i,}$, а частоты - $n_i$.

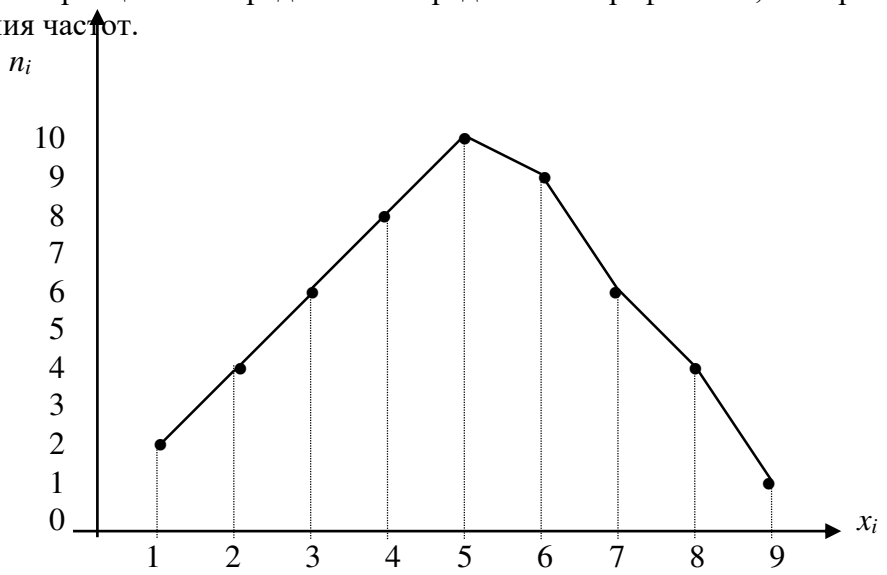
Произведем расчеты и запишем их результаты в таблицу.

| $x_i$ | *Подсчет частот вариант* | $n_i$ |
|---|---|---|
| *1* | *//* | *2* |
| *2* | *////* | *4* |
| *3* | *~~////~~ /* | *6* |
| *4* | *~~////~~ ///* | *8* |
| *5* | | |
| *6* | | |
| *7* | | |
| *8* | | |
| *9* | | |
| | *Контроль:* $\sum n_i =$ | *50* |

Получим вариационный ряд распределения частот.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 4 | 6 | 8 | | | | | |

2) Дискретный вариационный ряд можно представить графически, построив полигон распределения частот.




3) Рассчитаем средний размер (среднее число членов) семьи. Вначале расчет средней арифметической произведем по первой формуле.

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i$, тогда $\bar{x} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 +}{2+4+6+} =$

= ……

Средний размер семьи равен …… чел.

4) Охарактеризуем колеблемость размера семьи.

С начала для расчета дисперсии размера семьи используем первую формулу

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot n_i - \left(\bar{x}\right)^2$$

$$\bar{S}^2 = \frac{(1-4{,}94)^2 \cdot 2 + (2-4{,}94)^2 \cdot 4 + (3-4{,}94)^2 \cdot 6}{2+4+6+8+10+9+6+4+1}$$

…….....…

Или

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{50}(1\cdot 2 + 4\cdot 4 + 9\cdot 6 + 16\cdot 8 + \qquad\qquad ) - 4{,}94^2 =$$

…….....…

Дисперсия размера семьи равна …….. чел$^2$

Для того чтобы рациональнее выполнить вычисления по второй формуле составим таблицу.

В первом столбике перечислим значения вариант. Найдем *k* - шаг таблицы, т. е. интервал между соседними вариантами и *c* - произвольное число (но для простоты следует выбрать вариант, имеющий максимальную частоту). Исходя из условия, получим *k = 1, c = 5,* тогда вторая формула примет вид

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - 5}{1} \cdot n_i}{n} \cdot 1 + 5, \text{ и } \bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - 5}{1}\right)^2 \cdot n_i}{n} \cdot 1^2 - (\bar{x} - 5)^2.$$

| $x_i$ | $n_i$ | $\frac{x_i - c}{k}$ | $\left(\frac{x_i - c}{k}\right) \cdot n_i$ | $\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2$ | $\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 \cdot n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ***1*** | ***2*** | ***-4*** | ***-8*** | ***16*** | ***32*** |
| ***2*** | ***4*** | ***-3*** | ***-12*** | ***9*** | ***36*** |
| ***3*** | ***6*** | ***-2*** | | | |
| ***4*** | ***8*** | | | | |
| ***5*** | | | | | |
| ***6*** | | | | | |
| ***7*** | | | | | |
| ***8*** | | | | | |
| ***9*** | | | | | |
| | | | | | |
| | ***50*** | ***----*** | ***-3*** | ***----*** | ***185*** |

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - 5}{1} \cdot n_i}{n} \cdot 1 + 5 = \frac{-3}{50} \cdot 1 + 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ - ответы совпадают.

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - 5}{1}\right)^2 \cdot n_i}{n} \cdot 1^2 - (\bar{x} - 5)^2 = \frac{185}{50} \cdot 1^2 - (4{,}94 - 5)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ответы совпадают.

Найдем среднее квадратическое отклонение размера семьи

$$\bar{S} = \sqrt{\qquad\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Среднее квадратическое отклонение размера семьи - …… чел.

Найдем коэффициент вариации размера семьи по формуле

$$V(X) = \frac{1{,}9226}{4{,}94} \cdot 100\% = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Список использованной литературы

1. Основная литература:

Лисичкин В. Т., Соловейчик И. Л. Математика в задачах с решениями: Учебное пособие / В Т. Т. Лисичкин И. Л. Соловейчик. – СПб: Издательство «Лань». – 5-е издан. стериотип. 464 с.2011-2014(осн.)
2.Дополнительная литература:
1. Коган Е.А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 250 с. — (Среднее профессиональное образование).ЭБС znanium.com договор № 5669 эбс 10.01.2022г