ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Иркутский государственный университет путей сообщения»

Сибирский колледж транспорта и строительства

СБОРНИК ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

для специальности 09.02.01 Компьютерные системы и комплексы.

базовая подготовка

среднего профессионального образования

Иркутск 2022 г.

РАССМОТРЕНО:
Цикловой методической
Комиссией Математики
Председатель ЦМК: _____/Т.П. Новикова
«08» июня 2022 г.

Составитель: Убоженко Г. Г., преподаватель высшей категории, Сибирский колледж транспорта и строительства ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения».

Содержание

Предисловие

Сборник задач содержит задания для практических работ, предназначенных для более глубокого изучения дисциплины; систематизации и закрепления полученных знаний и практических умений; углубления и расширения теоретических и практических знаний; формирования умений использовать специальную, справочную литературу, а так же содержит методические указания по выполнению предложенных заданий и список литературы, необходимой для изучения дисциплины.

Использование данного сборника задач в учебном процессе позволит каждому студенту освоить теоретический материал, даст возможность применить полученные знания на практике.

Указания к оцениванию практических работ

Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения практических работ производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 – 100	5	отлично
80 – 89	4	хорошо
70 – 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Практическая работа № 1 «Вычисление вероятности случайного события»

Цель работы: формировать умение вычислять вероятности случайного события. Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

 Знать:

– классическое определение вероятности;

– методику вычисления вероятностей событий по классической формуле определения вероятности с использованием элементов комбинаторики

Уметь:

– вычислять вероятности событий по классической формуле определения вероятности

Вопросы к теме

1. Что является необходимым условием случайного события?

……

……

……

2. Как связаны вероятность и частота? Ответ обосновать.

……

……

……

3. Известно, что при трех подбрасываниях монеты герб выпал дважды. Можно ли утверждать, что частота появления события *А – при подбрасывании монеты выпал герб* равна 2/3? Ответ обосновать.

……

……

4. Чем отличаются несовместные случайные события и противоположные события? Что в них общего?

……

……

……

5. Если вероятность события равна единице, то является ли событие А достоверным? Ответ обосновать.

……

……

6. Вероятность достоверного события не меньше единицы? Ответ обосновать.

……

7. Какую размерность имеет частота? Ответ обосновать.

……

……

Задачи к практической работе

Задача № 1

Слово МАТЕМАТИКА составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.

Дано: ……
……
……

Найти: ……

Решение:

Испытание заключается в вынимании карточек с буквами в случайном порядке без возврата. Элементарным событием является полученная последовательность букв. Событие А состоит в получении нужного слова **МАТЕМАТИКА**. Элементарные события являются перестановками из 10 букв, значит, **n** найдем по формуле перестановок.

n = ……

Некоторые буквы в слове МАТЕМАТИКА повторяются:

М - ..... раза, **А** - ..... раза, **Т** - ..... раза, поэтому возможны перестановки, при которых слово не изменяется. Две буквы **М** можно переставить ..... способами, три буквы **А** можно переставить ..... способами, две буквы **Т** можно переставить ..... способами.

Количество элементарных событий **m**, входящих в состав события А равно произведению числа перестановок количества повторяющихся букв.

m = ……

Вероятность события A равна: $P(A) = \frac{m}{n} =$

……

Ответ:

……

Задача № 2

На рынке представлено 8 различных пакетов программ для бухгалтерии с приблизительно равными возможностями. Для апробации в своих филиалах фирма решила отобрать 3 из них. Сколько существует способов отбора 3-х программ из 8-ми, если отбор осуществляется в случайном порядке? Какова вероятность того, что среди отобранных случайно программ окажется 3 программы, занимающие наименьший объём памяти?

Дано*:* ……
……
……

Найти: ……

Решение:

Испытание состоит в том, чтобы из 8-ми программ выбрать 3. Порядок выбора программ не важен, повторяться они не могут, поэтому для подсчета числа способов выбора 3-х программ из 8-ми воспользуемся формулой сочетаний из 8 по 3.

$N = C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$

……

Найдем вероятность события А – среди отобранных случайно окажется 3 программы, занимающие наименьший объём памяти.

Число равновозможных исходов опыта равно числу способов отбора 3-х программ из 8-ми предложенных. Тогда n = ……

Число благоприятствующих исходов *m* = ..., так как отобрать 3 программы, занимающие наименьший объём памяти можно только одним способом.

Тогда $P(A) = m/n =$ ……

Ответ: *N* = ..., *P(A)* = ...

Задача № 3

В группе 5 отличников и 12 хорошистов. На конференцию из них наудачу выбирают 2-х человек. Чему равна вероятность того, что:

1) будут выбраны только отличники; 2) выбраны только хорошисты?

Дано: всего ……, …… – отличников, …… – хорошистов.

Испытание – ……

Событие А – ……

Событие В – ……

Найти: Р (А), Р (В).

Решение:

Решим задачу по формуле классического определения вероятности: ……

Число равновозможных исходов найдем в соответствии с испытанием: всего ……, выбирают из них ……. По формуле сочетаний из …….. по ……. найдем n.

Тогда $n = C\ldots = \frac{\cdot}{\cdot} =$ ……

Число благоприятствующих исходов найдем в соответствии с заданными событиями.

Событие А – …… Всего ……, выбирают из них ……...

По формуле сочетаний ……. найдем m. Тогда

$m = C\ldots = \frac{\cdot}{\cdot} =$ ……

Вероятность события А равна: $P(A) = \frac{m}{n}$ = ……

Событие В – ……

Число равновозможных исходов

……

Число благоприятствующих исходов

……

Вероятность события В равна: $P(B) = \frac{m}{n} =$ ……

Ответ: $P(A) =$……, $P(B) =$…….

Практическая работа № 2 «Определение вероятностей сложных событий»

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

-понятия произведения событий и суммы событий; формулу вероятности произведения независимых событий; –формулу вероятности суммы несовместных событий

Уметь:

– представлять сложные события через элементарные события с помощью операций над событиями;

– вычислять вероятности сложных событий

Вопросы к теме

1. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?

……

2. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

……

3. Сформулируйте теорему о вероятности суммы совместных событий.

……

4. При каком условии вероятность суммы двух случайных событий равна сумме вероятностей этих событий?

……

5. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?

……

6. Сформулируйте теорему о вероятности произведения независимых событий.

……

……

7. При каком условии вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятностей этих событий?

……

Задачи к практической работе

Задача № 1

В урне 5 черных и 6 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них имеется:
а) 2 белых шара; б) меньше чем 2 белых шара;
в) хотя бы один белый шар.

Дано: ……
……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

Решим задачу по формуле классического определения вероятности: ……

Число равновозможных исходов найдем в соответствии с испытанием: всего ……., выбирают из них ……. По формуле …….. из ……. по ……. найдем n. Тогда n = ……

а) А - среди вынутых шаров 2 белых. Значит, среди вынутых шаров 2 белых и 2 черных. *A* = ……

Число исходов события *A* найдем по формуле $m = m_1 \cdot m_2$, где m_1 – число способов выбрать 2 белых шара, а m_2 - число способов выбрать 2 черных шара. И белые, и черные шары берут одновременно, поэтому число способов выбора шаров перемножаем.

Белых шаров 6, берут из них 2, значит m_1 = ……

Черных шаров ....., берут из них ....., значит m_2 = ……

$m = m_1 \cdot m_2$ =…….....

Вероятность события *A* равна: $P(A) = \dfrac{m}{n}$ = ……

б) В - среди вынутых шаров меньше чем 2 белых. Это событие состоит из двух несовместных событий:

B_1 - среди вынутых шаров только один белый и 3 черных.

B_2 - среди вынутых шаров нет ни одного белого, все 4 шара черные.

Так как события B_1 и B_2 несовместны, можно использовать формулу:

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2)$$

Вероятности событий B_1 и B_2 по формуле классического определения вероятности:

……Число исходов события B_1 найдем по формуле $m = m_1 \cdot m_2$, где m_1 – число способов выбрать 1 белый шар, а m_2 - число способов выбрать 3 черных шара. Белых шаров 6, берут из них 1, значит m_1 = ……

Черных шаров ....., берут из них ....., значит

m_2 = …… $m = m_1 \cdot m_2$ =……

B_2= {4 черных} Черных шаров ...., берут из них ....., значит *m* = ……..

Вероятности событий B_1 и B_2 равны: $P(B_1) =$ …… $P(B_2) =$ …… $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$ = ……

в) *C* – среди вынутых шаров хотя бы один белый. Здесь событие С определяется словами "хотя бы один" и прямое решение приводит обычно к сложным вычислениям. Этому событию удовлетворяют следующие сочетания шаров: 1 белый и 3 черных (C_1), 2 белых и 2 черных (C_2), 3 белых и 1 черный (C_3), 4 белых (C_4). Имеем: $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Для вычисления вероятности события *C* необходимо найти вероятности четырёх событий C_1, C_2, C_3, C_4.

Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем вычислить вероятность искомого события.

Противоположным событию *C* является событие $\overline{C}$ - *среди вынутых шаров нет ни одного белого*, $\overline{C}$ = {4 черных} = B_2

$P(\overline{C}) = P(B_2) =$ ……

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) =$ ……

Ответ*:* ……, ……., ……..

Задача № 2

Устройство состоит из трех независимых элементов, работающих в течение времени Т безотказно соответственно с вероятностями 0,851, 0,751 и 0,701. Найти вероятность того, что за время Т выйдет из строя: а) только один элемент; б) хотя бы один элемент.

Дано: ……
……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

Дано сложное испытание – работа устройства, состоявшего из 3-х элементов. Испытание, т.е. работу за время **T** нужно рассмотреть на двух уровнях: на уровне устройства и на уровне элементов.

Введем элементарные события: B_i – i-ый элемент не выходит из строя; $\overline{B}_i$ - i-ый элемент выходит из строя.

а) *A – за время T выходит из строя только один элемент*. Выразим А, через элементарные события. Событие А происходит тогда, когда выходит из строя либо только 1-й, либо только 2-й, либо только 3-й элемент.

A = {HPP, PHP, PPH} = ……

Учитывая независимость элементов устройства, несовместимость событий B_i *и* $\overline{B}_i$ применим теоремы сложения и умножения вероятностей *P(A)* = …….....

Вероятности элементарных событий B_i определять не надо, так как эти вероятности заданы по условию.

$P(B_1) = p_1 =$ ……..., $P(B_2) = p_2 =$ ……..., $P(B_3) =$ …….

B_i и $\overline{B}_i$ - противоположные события. $P(\overline{B_1}) = 1 - P(B_1) =$ …….
……
……

Вычислим вероятность события А.

P(A) = …….....
……

б) *B – за время* ***T*** *выходит из строя хотя бы один элемент.*
Событие определяется словами "хотя бы один", значит, используем противоположное событие $\overline{B}$ *- за время* ***T*** *все элементы работают безотказно.* $\overline{B}$ = { РРР} = …….

Найдем вероятность события $\overline{B}$:
……
P(B) = …….

Ответ: ……

Практическая работа № 3 «Полная вероятность и формула Байеса».

Дидактическая цель**.** Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

- Знать:
- формулу полной вероятности;
- формулу Байеса
- Уметь:
- находить полную вероятность;
- находить вероятности гипотез

Вопросы к теме

1. Может ли вероятность произведения двух событий быть равной произведению вероятностей этих событий?
……
2. Если сумма вероятностей событий равна 1, можно утверждать, что они образуют полную группу? ……
3. Можно ли утверждать, что сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице?
……
4. Образуют ли два противоположных события полную группу событий?
……
5. Пусть *U* и *V* – соответственно достоверное и невозможное события. Чему равна вероятность суммы этих событий?
……
6. Пусть *U* и *V* – соответственно достоверное и невозможное события. Чему равна вероятность произведения этих событий?
……
7. При каком условии применяют формулу полной вероятности?
……

Задачи к практической работе

Задача № 1

В пирамиде стоят 19 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью 0,81, а стреляя из винтовки без оптического прицела, с вероятностью 0,46. Найти вероятность того, что стрелок поразив мишень, стрелял из винтовки с оптическим

прицелом.

Дано: ……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

А – стрелок поразит мишень – это событие может произойти только с одной из гипотез

B_1 – стрелок возьмет винтовку с оптическим прицелом;
B_2– стрелок возьмет винтовку без оптического прицела.

Найдем вероятности гипотез. По формуле классического определения вероятности
$P(B_1)$ =……..
$P(B_2)$ =……..

Условные вероятности выпишем из условия задачи.
$P(A/B_1)$ = …….. $P(A/B_2)$ = ……

Используем формулу полной вероятности.
$P(A) = P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2)$ = ……..
……
По формуле Байеса вычисляем условную вероятность гипотезы B_1.
……
……

Ответ: ……

Задача № 2

На химическом заводе уставлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация, звуковой сигнал срабатывает с вероятностью 0,950. Звуковой сигнал может сработать случайно и без аварийной ситуации с вероятностью 0,02. Реальная вероятность аварийной ситуации равна 0,004. Известно, что звуковой сигнал сработал. Чему равна вероятность реальной аварийной ситуации?

Дано: ……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

Рассмотрим событие ***А*** – *сигнал сработал*. Это событие может произойти только с одной из гипотез B_i (i =1,2):
B_1 – есть аварийная ситуация;
B_2 – нет аварийной ситуации;

Тогда по формуле полной вероятности вероятность события *А* будет равна
$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2)$
$P(B_1)$ – это вероятность реальной аварийной ситуации. Она известна по условию.
$P(B_1)$ = ……..
B_1 *и* B_2 – два взаимно противоположных события.

$P(B_2)$ = ……..

Запишем условные вероятности события ***A***.

……

……

Используя установленные вероятности, определим вероятность события *A:* $P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) =$

……

……

Найдем вероятность реальной аварийной ситуации в том случае, если звуковой сигнал сработал по формуле Байеса.

……

……

Ответ:……

Практическая работа № 4 «Повторение испытаний».

Дидактическая цель**.** Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

–понятие схемы Бернулли;

–формулу Бернулли;

– приближенные формулы в схеме Бернулли

Уметь:

– вычислять вероятности событий в схеме Бернулли

Вопросы к теме

1. Какими должны быть испытания, чтобы можно было применить формулу Я. Бернулли?

……

2. Перечислите фундаментальные условия схемы независимых испытаний.

……

……

3. Объясните значение всех символов в формуле Я. Бернулли.

……

……

4. Запишите формулу вычисления вероятности события в схеме независимых испытаний, если: а) событие произошло ровно *k* раз;

……

б) событие произошло от *k* до *m* раз;

……

……

в) менее 2-х раз;

……

г) не более 2-х раз.

……

……

5. При каких условиях можно применять закон Пуассона?

……

6. Записать формулу Пуассона и объяснить значение символов в этой формуле.

……

……
7. Чему равен параметр λ в этой формуле?
……
8. При каких условиях можно применять формулу Лапласа?
……
……
9. Записать формулу Лапласа и объяснить значение символов в этой формуле.
……
……
10. Как находить значения функции для отрицательного аргумента в локальной формуле Лапласа?
……
……
11. Как находить значения функции для аргумента больше или равного 4-м в локальной формуле Лапласа?
……

Задачи к практической работе

Задача № 1

Вероятность приёма радиосигнала при каждой передаче равна 0,8. Найти вероятность того, что при шестикратной передаче сигнал будет принят:
1) четыре раза; 2) не менее четырех раз; 3) не более одного раза.
Найти наивероятнейшее число принятых сигналов.

Дано: ……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

Испытание – передача сигнала. «Успех» - сигнал будет принят.
1) B – сигнал будет принят четыре раза
Пространство исходов события $B = \{ б(4) \}$, тогда $P(B) = P_б(4)$.
Применим формулу Бернулли.
……
……
2) C – сигнал будет принят не менее четырех раз.
C – «не менее четырех раз», означает, что сигнал будет принят 4, 5 или 6 раз. Пространство исходов события $C = \{ б(4), б(5), б(6) \}$, тогда
$P(C) = P_б(4) + P_б(5) + P_б(6)$.
$P_б(4)$ = … ……
$P_б(5)$ = ……
$P_б(6)$ = ……
$P(C) = P_б(4) + P_б(5) + P_б(6)$ = ……
3) D – сигнал будет принят не более одного раза
D – «не более одного раза», означает, что сигнал будет принят один раз или ни разу. Пространство исходов события $D = \{ б(0), б(1) \}$, тогда $P(D) = P_б(0) + P_б(1)$.
$P_б(0)$ = … ……
$P_б(1)$ = ……
$P(D) = P_б(0) + P_б(1)$= ……
4) Наивероятнейшее число успехов находится в интервале
$np - q \square k \square np + p$.

……

Задача № 2

В каждом из 700 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,35. Найти вероятность того, что событие А происходит:

а) точно 270 раз; б) хотя бы один раз.

Дано: ……

……

……

……

Найти: ……

Решение:

а) Найдем вероятность того, что событие А происходит точно 270 раз

Число испытаний достаточно велико, проверим значение $n \cdot p$ и сравним его с числом 10: $n \cdot p$ = ……, следовательно необходимо применять …….

По условию: n = ……, p = ……, m = ……, $q = 1 - p$ = ….....

Вычислим npq =……, $\sqrt{npq}$ = ……

$m - np$ =……,тогда $u = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ = ……,

По таблице 1 приложения находим $f(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$.

Подставим найденные значения в формулу Муавра-Лапласа: $P_{700}(270)$ =

……

б) Найдем вероятность того, что событие А происходит хотя бы один раз. Для быстрого вычисления вероятности этого события введем событие ему противоположное – $\overline{B}$ – событие не произойдет ни разу, то есть число появлений события равно нулю.

P($\overline{B}$) = $P_{700}(0)$, тогда P(B) = 1 – P($\overline{B}$)

Найдем $P_{700}(0)$

m – np =……,тогда

$u = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ =……..…,

известно, что $f(-u) = f(u)$ По таблице 1 приложения находим $f(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$.

Подставим найденные значения в формулу Муавра-Лапласа: $P_{700}(0)$ =

……

$P(B) = 1 - P(\overline{B})$= ……

Ответ: ……

Задача 3

На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью 1/200. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет:

а) точно 1 неправильное соединение;

б) меньше чем 3 неправильных соединения;

в) больше чем 2 неправильных соединения.

Дано: ……
……
……
……

Найти: ……

Решение:

Число испытаний велико, а вероятность события *A* мала. Проверим условие применимости асимптотической формулы Бернулли. Найдем произведение *np* и сравнить его с числом 10.

Найдем произведение *np* = ...*10*, поэтому формулу Бернулли необходимо заменить приближенной формулой .....

$$P_{n(m)} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np.$$

Событие *A – точно 1 неправильное соединение.*

Пространство исходов события *A = { 200(1) }*, тогда *P (A) = $P_{200}(1)$*

np = ..., следовательно, *λ* = ..., а *m* = ...

P(A) = P_{200} (1) = ...

Событие *B – меньше чем 3 неправильных соединения*.

Пространство исходов события *B = { 200(0), 200(1), 200(2) }*, тогда

P (B) = $P_{200}(0)$+ $P_{200}(1)$+ $P_{200}(2)$

Найдем *$P_{200}(0)$ и $P_{200}(2)$*

$P_{200}(0)$ = ……

$P_{200}(2)$= ……

P(B) = ……

Событие C – больше чем 2 неправильных соединения

Пространство исходов события *C = { 200(3), 200(4), 200(5),....., 200(200)}*

Проще сначала найти вероятность противоположного события и затем вычислить вероятность искомого события.

Противоположным событию *C* является событие $\overline{C}$ - *неправильных соединений меньше 3-х:* $\overline{C}$ *= {200(0), 200(1), 200(2)} = B,*

P(C) = 1 – P(B) = ……

Ответ: ……

Практическая работа № 5 «Распределение дискретной случайной величины: биномиальное, Пуассона» .

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

- понятие ДСВ;
– понятие ряда распределения ДСВ
– законы распределения ДСВ: биномиальный, Пуассона.
– свойства законов распределения ДСВ

Уметь:

-– записывать ряд распределения ДСВ, заданной содержательным образом

Вопросы к теме

1. Какая величина называется случайной?
……
……
2. Какая случайная величина называется дискретной? Приведите примеры дискретной случайной величины.
……
……
3. Какая случайная величина называется непрерывной? Приведите примеры непрерывной случайной величины.
……
……
4. Что называется законом распределения дискретной случайной величины?
……
……
5. Объясните что такое "многоугольник распределения вероятностей". Как его построить?
……
……
6. Перечислить комплекс условий биномиального закона.
……
……

……
7. Перечислить комплекс условий закона Пуассона.
……
……

Задачи к практической работе

Задача № 1

В партии из 8 деталей пять стандартных. Наудачу взяты четыре детали. Построить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Дано: Испытание – ……

Случайная величина X – ……

Найти: закон распределения случайной величины X.

Решение:

Пусть *X – число стандартных деталей среди отобранных.*

Всего ..... деталей, из них ..... стандартных и ..... нестандартных. Взять 4 нестандартных деталей невозможно, так как их всего три. Поэтому случайная величина может принимать следующие четыре значения: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 4.$ Для определения вероятности появления конкретного числа стандартных деталей введем события A_i – из *4-х* деталей *i* стандартных.

Число исходов опыта $n = C_8^4 =$ ……

Если $x_1 = 1$, то произошло событие A_1 – из *4-х* деталей *1* стандартная.

Число исходов события A_1 $m = m_1 \cdot m_2 = C_5^1 \cdot C_3^3 = 5 \cdot 1 = 5$

Следовательно, $P(X = 1) =$ ……

Если $x_2 = 2$, то произошло событие A_2 – из *4-х* деталей ……

Число исходов события A_2 $m = m_1 \cdot m_2 =$ ……

Следовательно, $P(X=2)=$ ……

Если $x_3 = 3$, то произошло событие A_3 – ……

Число исходов события A_3 ……

Следовательно, $P(X=3)=$ ……

Если $x_4 = 4$, то произошло событие A_4 – ……

Число исходов события A_4 ……

Следовательно, $P(X=4)=$ ……

Контроль - $\sum_{i=1}^{4} p_i =$ ……

Искомый ряд распределения имеет вид:

x_i				
p_i				

Задача №2

В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленной первой фабрикой

Дано: Испытание – ……

……..……

Случайная величина X – ……

Найти: закон распределения случайной величины X

Решение:

Пусть X – ……

Случайная величина может принимать следующие значения ……. ……

Случайная величина распределена по закону ……..

Число испытаний n равно ……

Вероятность «успеха» - это вероятность того, что ……. ……

По условию поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2:3. Вероятность того, что случайно выбранная пара обуви изготовлена первой фабрикой, равна $p = 2 / (2 + 3) =$ ....., $q = 1 - p =$ ……

Число «успехов» равно m, и меняется в соответствии со значениями случайной величины.

$x_1 = 0$, событие A_0 – ни одна пара не изготовлена 1-й фабрикой.

$P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^{4-0} =$ ……

$x_2 = 1$, событие A_1 – одна пара ……

$P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1 p^1 q^{4-1} =$ ……

$x_3 = 2$, событие A_2 – …….

$P(X = 2) = P_4(2) =$ ……

$x_4 = 3$, событие A_3 – …….

$P(X = 3) =$ …….

$x_5 =$ ...., событие …….

$P(X = 4) =$ …….

Контроль:

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 =$ ……

И так искомый закон распределения имеет вид:

x_i					
p_i					

Случайная величина X – число пар обуви среди четырех, изготовленных первой фабрикой, имеет биномиальный закон распределения с параметрами n = ……., p = ……..

Практическая работа № 6 «Распределение дискретной случайной величины: геометрическое, гипергеометрическое».

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

– понятие ДСВ;
– понятие ряда распределения ДСВ
– геометрический и гипергеометрический законы распределения ДСВ;
– свойства законов распределения ДСВ

Уметь:

– записывать ряд распределения ДСВ, заданной содержательным образом

Вопросы к теме

1. Какая величина называется случайной?

……

……

2. Какая случайная величина называется дискретной? Приведите примеры дискретной случайной величины.

……

……

3. Какая случайная величина называется непрерывной? Приведите примеры непрерывной случайной величины.

……

……

4. Что называется законом распределения дискретной случайной величины?

……

……

5. Объясните что такое "многоугольник распределения вероятностей". Как его построить?

……

……

……..…
5. Перечислить комплекс условий геометрического закона.
……..…
……..…

7. Перечислить комплекс условий гипергеометрического закона.
……..…
……..…

……..…

Задачи к практической работе
Задача № 1

Стрелок, имея 4 патрона, стреляет до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить закон распределения числа использованных патронов.

Дано: Испытание – стрельба до первого попадания, при наличии 4-х патронов.
Событие *A* – ……..
P(A) = 0.6 ……
Случайная величина *X* – …….
Найти: закон распределения случайной величины *X*.

Решение:
Испытание – стрельба до первого попадания, при наличии *4-х* патронов.
Построим ПЭИ опыта *Ω = {П; НП; ННП; НННП; НННН}*.
Поэтому случайная величина может принимать следующие четыре значения: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$

Если израсходован 1 патрон ($x_1 = 1$), то произошло событие A_1 - стрелок попал в цель. $P(X=1)=P(A)=0.6$

Если израсходовано 2 патрона ($x_2=2$), то произошло событие A_2 – стрелок попал в цель при втором выстреле, пространство исходов события $A_2=\{НП\}$. $P(X=2) = P(A_2) = P(\overline{A}) \cdot P(A) =$ ……

Если израсходовано 3 патрона ($x_3 = 3$), то произошло событие A_3 – стрелок попал в цель при третьем выстреле, пространство исходов события $A_3 = \{…….\}$. $P(X=3) = P(A_3) =$ ……
……

Если израсходовано 4 патрона ($x_4 = 4$) , то стрелок прекращает стрельбу. При этом он может как попасть в цель, так и промахнуться. Пространство исходов события $A_4 = \{НННП, НННН\}$. $P(X=4) = P(A_4) =$
……
……
Контроль - ……

Итак, закон распределения имеет вид

x_i				
p_i				

Задача № 2

Проводится проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей). Составить закон распределения числа проверенных деталей.

Дано: Испытание – ……

Событие А – ……, Р(А) = …….

Случайная величина Х – ……

Найти: закон распределения случайной величины Х.

Испытание – проверка большой партии деталей до обнаружения бракованной (без ограничения числа проверенных деталей)

Построим ПЭИ опыта *Ω = {Б; СБ; ССБ; СССБ; . . . }*. Так как результат каждого следующего выстрела естественно считать независящим от предыдущего, то вероятности элементарных исходов соответственно равны: если проверена 1 деталь, то произошло событие

A_1 – ……..…. $P(X=1)=P(A)=0.1$

Если проверено 2 детали, то произошло событие A_2 – ……., пространство исходов события A_2 = { …….}.

$P(X=.....) = P(A_2) = P(\overline{A}) \cdot P(A) = (1 - 0.1) \cdot 0.1 =$ …….

Если проверено 3 детали, то произошло событие A_3 – ……., пространство исходов события A_3 = {…….}.

$P(X=.....) = P(A_3)$ = ……. = …….=……

Если проверено 4 детали, то пространство исходов события A_4 = {…….}

$P(X=....) = P(A_4)$ = ……= …….

И так далее. Итак, закон распределения имеет вид

x_i					…	m	…
p_i					…	$0,9^{m-1} \cdot 0.1$	…

Случайная величина Х – число проверенных деталей до обнаружения бракованной – имеет геометрическое распределение с параметром p = ...

Практическая работа № 7 «Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины».

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

– определение математического ожидания ДСВ;
– определение дисперсии ДСВ;
– определение среднеквадратического отклонения

Уметь:

– вычислять характеристики ДСВ, заданной своим распределением;
– с помощью свойств вычислить характеристики для функций одной или нескольких ДСВ

Вопросы к теме

1. Является ли математическое ожидание случайной величиной или нет?
……
2. Можно ли найти математическое ожидание случайной величины, связанной с некоторым опытом, если заданы ПЭИ этого опыта и элементарные вероятности?
……
3. Можно ли по результатам наблюдений за случайной величиной:
а) составить закон ее распределения; б) найти её математическое ожидание?
……
4. Пусть a и b – соответственно наименьшее и наибольшее значения случайной величины X. Какие из следующих соотношений верны:
а) $M(X) < a$; *б)* $a \leq M(X) \leq b$; *в)* $M(X) > b$?
……
5. Случайная величина принимает два значения 0 и 1. Чему равно её математическое ожидание?
……
6. Является ли дисперсия случайной величиной или нет?
……
7. Чему равна $D(-X)$, если $D(X) = 3$?
……
8. Случайная величина принимает значения $-3; -2; -1; 0$. Что можно сказать о знаке ее дисперсии?
……
9. Может ли дисперсия случайной величины быть:
а) меньше нуля; б) равной нулю?
……
10. Как измениться дисперсия случайной величины, если от всех значений вычесть одно и тоже число?
……

Задачи к практической работе

Задача № 1

а) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	-5	2	3	4
p_i	0.4	0.3	0.1	0.2

Решение

Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности.

По формуле $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$

$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 +$ ……

Дисперсию можно вычислить по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, Напишем закон распределения X^2:

x_i^2	25	4	9	16
p_i	0.4	0.3	0.1	0.2

Найдем математическое ожидание X^2:

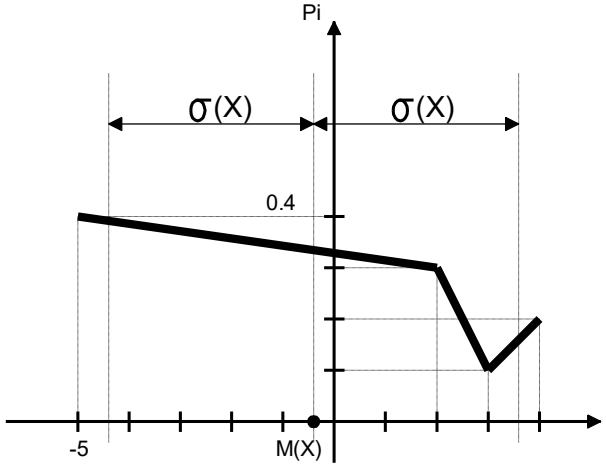
$M(X^2) =$ ……...

Найдем дисперсию $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 =$ …….....

Среднее квадратическое отклонение найдем по формуле:

$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$ = ……..

Построим многоугольник распределения. Отметим *M(X)* и *σ(X)*



Ответ: M(X) = …….. D(X) = ……., σ(X) = ……

б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины Y, заданной законом распределения:

y_k	-4	6	10
p_k	0.2	0.3	0.5

Найдем математическое ожидание

$M(Y) = -4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}3 +$ ……

Найдем дисперсию $D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2$, вычислим $M(Y^2)$:

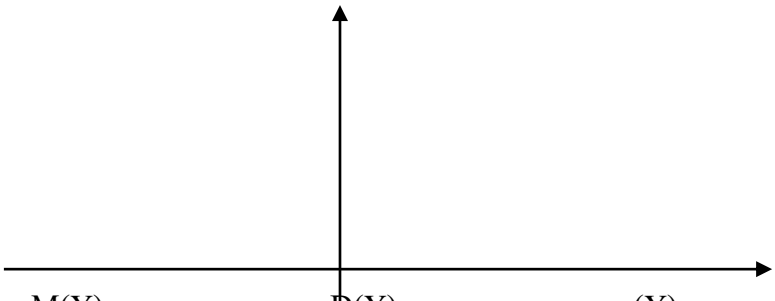
$M(Y^2) = (-4)^2 \cdot 0{,}2 + 6^2 \cdot 0{,}3 + 10^2 \cdot 0{,}5 =$ ……

$D(Y) =$ …….

Среднее квадратическое отклонение найдем по формуле:

……...

Построим многоугольник распределения. Отметим *M(Y)* и *σ(Y)*



Ответ: M(Y) = …….. D(Y) = ……., σ(Y) = ……

Задача № 2

Найти математическое ожидание и дисперсию по свойствам числовых характеристик и, используя результаты задачи № 1.

а) Z = 2X + 3; б) U = 3X – 4Y

Решение

1) Используя свойства математического ожидания, получим:
а) M(Z)= M(2X +3)= M(2X)+ M(3)= ……..
б) M(U)= M(3X – 4Y)= ……..
Ответ: а) M (Z) = ……..; б) M (U) = …….

2)Вычислим дисперсию дискретной случайной величины Z, используя свойства дисперсии.
а) D(Z)=D(2X +3)= D(2X) + D(3) = $2^2 \cdot$D(X)+ 0 = …….
б) D(U) = D(3X – 4Y) = D(3X) + D(-4Y) = $3^2 \cdot$ D(X) + $(-4)^2 \cdot$ D(Y) =
……...
Ответ: а) D (Z) =……; б) D (U) = ……

Задача № 3
Дискретные случайные величины заданы распределениями:

x_i	10	12	16
p_i	0,4	0,1	0,5

y_i	1	2
p_i	0,2	0,8

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины
Z = X + Y.
Решить задачу: 1) составив ряд распределения Z, 2) по свойствам.

Дано: случайные величины X и Y, заданные рядами распределения
Z= X + Y
Найти: M(Z), D(Z)

Решение:
Значение случайной величины *Z* найдем, если сложим каждое значение случайной величины *X* с каждым значением случайной величины *Y*. Соответствующие вероятности складываемых значений x_i и y_i будем перемножать.

Для записи решения составим таблицу.

Z = X + Y	x_i	***10***	***12***	***16***
y_i	p_i	***0.4***	***0.1***	***0.5***
1	***0.2***	*11* / *0.08*	*13* / *0.02*	*17* / *0.1*
2	***0.8***	*12* / *0.32*	*14* / *0.08*	*18* / *0.4*

Контроль: *0,08 + 0,02 + 0,1 + 0,32 + 0,08 + 0,4 = 1;* $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$
Составим ряд распределения. Для этого сравним полученные значения случайной величины *Z:* одинаковых значений нет, наименьшее равно *11*.
Получим рад распределения случайной величины *Z*

z_i	*11*	*12*	*13*	*14*	*17*	*18*

p_i	0.08	0.32	0.02	0.08	0.1	0.4

$M(Z) = z_1 p_1 + z_2 p_2 + \ldots + z_n p_n$

$M(Z) = 11 \cdot 0{,}08 + 12 \cdot 0{,}32 +$ ……

…….

Дисперсию можно вычислить по формуле $D(Z) = M(Z^2) - [M(Z)]^2$

$M(Z^2) = 11^2 \cdot 0.08 + 12^2 \cdot 0.32 + 13^2 \cdot 0.02 + 14^2 \cdot 0.08 + 17^2 \cdot 0.1 + 18^2 \cdot 0.4 =$

…….

Ответ: M (Z) =…… D (Z) =……

Воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии.

Найдем M(X), M(Y) и D(X), D(Y).

1. M(X) = ……..

   $M(X^2)$ = …….....

   D(X) = …….....

2. M(Y) = ……..... $M(Y^2)$ = …….....

   D(Y) = …….....

3. M(Z) = M(X + Y) = M(X) + M(Y) = …….

D(Z) = D(X + Y) = ……

– ответы совпадают

Практическая работа № 8 «Функция и плотность распределения непрерывной случайной величины».

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

- Знать:

– определение и свойства функции плотности НСВ;

– определение и свойства интегральной функции распределения НСВ;

–связь между интегральной функцией распределения и формулой плотности

- Уметь:

– находить функцию плотности по интегральной формуле распределения НСВ;

– вычислять вероятности для НСВ по её функции плотности и интегральной функции распределения

Вопросы к теме

1. Дать определение функции распределения вероятностей.

……...……

2. Дайте геометрическую интерпретацию функции распределения.

……...……

3. Перечислите свойства функции распределения.

……...……

4. Дайте определение дифференциальной функции распределения.

……...……

5. Что такое кривая распределения?

……...……

6. Геометрический смысл вероятности попадания значения случайной величины в заданный интервал.

……...……

7. Перечислите свойства дифференциальной функции распределения.
……...……
……...……

Задачи к практической работе

Задача № 1

Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0; при\ x\le 0\\ \dfrac{x}{3}; при\ 0<x\le 3\\ 1; при\ x>3\end{cases}$$

Найти функцию плотности вероятности f(x) случайной величины X.
Построить график f(x) и F(x).
Найти вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значения:
а) равное 1; б) не более 1; в) в интервале от 1 до 2.
Решить задачу двумя способами: используя F(x) и f(x).
Изобразить указанные вероятности на графиках F(x) и f(x).

Решение

Найдем функцию плотности вероятности f(x) случайной величины X.
Функцию вероятности вычислим по формуле $f(x) = F'(x)$.
Если $x \le 0$; то $F(x) = 0$; тогда $f(x) = F'(x) = (0)' = 0$.
Если $0 < x \le 3$; то $F(x) =$……, тогда $f(x)=(.....)'=$ ……..
Если $x > 3$, то $F(x) =$ …, тогда $f(x) = (.....)' =$ ……
Запишем функцию плотности

$$f(x)=\begin{cases}0; \quad при\ x\le 0\\ .....; при\ 0<x\le 3\\ .....; при\ x>3\end{cases}$$

Построим графики $F(x)$ и $f(x)$.

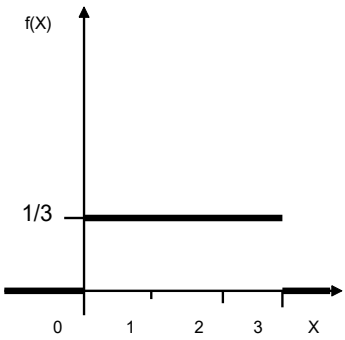


рис. 1

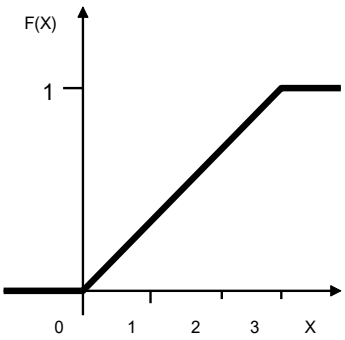


рис. 2

а) Найдем вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение равное *1*.
Найдем $P(X =$ ……$)$.
Т. к. случайная величина X - непрерывна, то вероятность отдельно взятого значения равна нулю, т.е. $P(X =$ …..$) =$ …….

б) Найдем вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение не более *1*.

P(X ≤ …..) найдем по формуле *P(a ≤ X ≤ b) = F(b) - F(a)*

$$P(-\infty \le X \le 1) = P(0 \le X \le 1) = F(...) - F(...) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Решим задачу 2-м способом. Воспользуемся формулами:

$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx; \quad \int dx = x + C,$ Получим:

$$P(-\infty \le X \le 1) = \int_{-\infty}^{1} ..... dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

Вывод: оба ответа совпадают.

Изобразим полученную вероятность на графиках **F(x)** и ***f*(x)**.

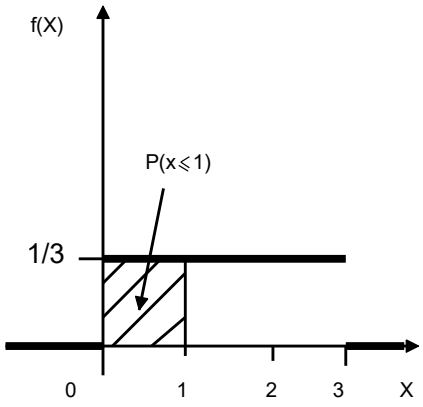


Рис. 3

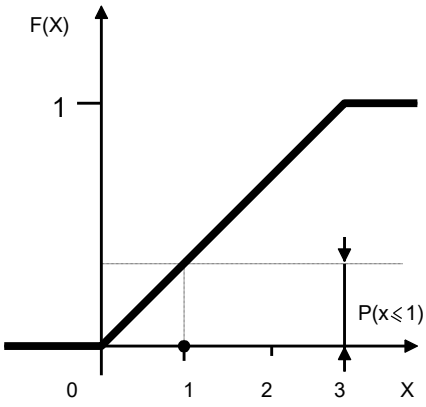


Рис. 4

На рис.3 *P (X ≤ 1)* это площадь под кривой распределения *f(x)* на отрезке *[0; 1]*.

На рис. 4 *P(x ≤ 1)* это ордината точки *F(1)*

в) Найдем вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение в интервале от *1* до *2*.

$$P(1 \le X \le 2) = F(2) - F(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или

$$P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 f(x)\, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Изобразим полученную вероятность на графиках **F(x)** и ***f*(x)**.

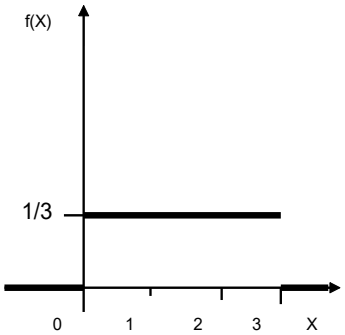


Рис 5.

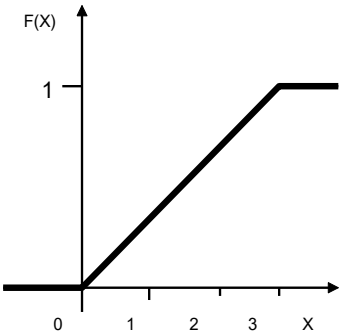


Рис 6.

На рис. 5 $P(1 \le X \le 2)$ это площадь под кривой распределяется на отрезке *[1; 2];*
На рис. 6 $P(1 \le X \le 2)$ это приращение ординаты графика *P(x)* на отрезке *[1; 2].*

Задача № 2

Случайная величина X задана функцией плотности вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0; при\ x \le 0 \\ \dfrac{x}{2}; при\ 0 < x \le 2 \\ 0; при\ x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x) случайной величины X.
Построить график f(x) и F(x).
Вычислить P(1 ≤ X ≤ 2)
Изобразить на графиках f(x) и F(x) найденную вероятность. Отметить на графике F(x), то значение случайной величины X, при котором она имеет наибольшую вероятность.

Решение

Функцию распределения *F(x)* непрерывной случайной величины найдем по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Область определения дифференциальной функции *f(x)* непрерывна, но функция задана различными аналитическими выражениями на разных интервалах.

Если x ≤ 0, тогда *f(x) = 0* и $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt$ .....

Если $0 < x \le 2$, то $f(x) =$.....; следовательно $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} .....dt =$

.....

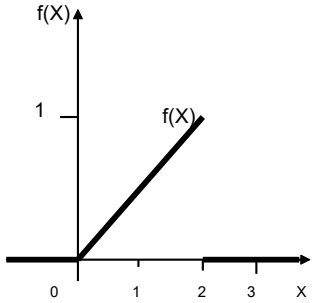
Если $x > 2$, то *f(x)* = ... и, следовательно, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{2} \frac{t}{2}\, dt + \int_{2}^{x} 0\, dt =$

.....

Таким образом, искомая функция

$$F(x) = \begin{cases} .....; при\ x \le 0 \\ .....; при\ 0 < x \le 2 \\ .....; при\ x > 2 \end{cases}$$

Построим графики функции



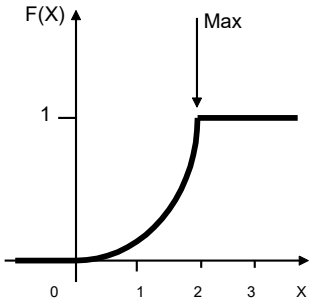


Рис 7. Рис 8.

Наибольшую вероятность *F(x)* имеет при *x* = ...
Вычислим $P(1 \le X \le 2)$ .....
.....
Ответ: .....

Задача 3
Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le -1 \\ Cx+\frac{3}{4} & при\ -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1 & при\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Решение
Найдем коэффициент C.
При *x = 1/3, F(1/3) = 1*, т.е.

$C\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=1,$ …….

Тогда функция распределения примет вид:

$$F(x)=\begin{cases} ..... & при\ x \le -1 \\ .....x+\frac{3}{4} & при\ -1 < x \le \frac{1}{3} \\ ..... & при\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Найдем вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$P(-\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{3}) = F(\frac{1}{3}) - F(-\frac{1}{3})$ .....

Ответ: .....

Практическая работа № 9 «Характеристики непрерывной случайной величины».

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

– методику вычисления математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения НСВ по её функции плотности;
– определение медианы НСВ и методику её нахождения

Уметь:

– вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение НСВ по её функции плотности;
– находить медиану НСВ

Вопросы к теме

1. Дайте определение математического ожидания случайной величины.
……..
2. В чем заключается смысл математического ожидания?
……..
4. Запишите формулы для вычисления математического ожидания непрерывной случайной величины.
……..
5. Перечислите свойства математического ожидания.
……..
……..
……..
6. Дайте определение дисперсии случайной величины.
……..
7. В чем заключается смысл дисперсии?
……..
8. Запишите формулы для вычисления дисперсии непрерывной случайной величины.
……..
9. Перечислите свойства дисперсии.
……..
……..

Задачи к практической работе

Задача № 1

Случайная величина X задана функцией плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \langle 0 \\ x/2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x \rangle 2 \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(X) случайной величины X.
Построить графики функций f(x) и F(x).
Вычислить для X ее среднее значение EX, дисперсию DX, моду Mo и медиану Me.
Отметить их на графике f(x) и F(x).

Решение

Функцию распределения *F(x)* непрерывной случайной величины найдем по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

……..
……..

Среднее значение *X* вычисляем по формуле

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{2} x \cdot \frac{x}{2} \cdot dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

.....

Для нахождения дисперсии X воспользуемся формулой

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (EX)^2$$

Найдем $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$ .....

Тогда $D(X) = E(X^2) - (EX)^2 =$ ……

Разброс значений $\sigma(x) =$.....……. ≈ ……

Построим графики **F(x)** и ***f*(x)**.

Изобразим среднее значение EX, дисперсию DX, моду Mo и медиану Me.

Из графика $f(x)$ видно, что плотность распределения достигает максимума в точке $x =$ ....., значит $Mo =$ .....

Для нахождения медианы надо решить уравнение

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

тогда ……

.....

.....

По условию величина определена только на отрезке $[0;2]$, значит

$Me \approx$ ……

Ответ: .....

Задача № 2 Определить вид распределения случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0; при\ x\le 0\\ \dfrac{x}{3}; при\ 0<x\le 3\\ 1; при\ x>3\end{cases}$$

Найти EX, DX, Mo, Me исходя из свойств её распределения. Сравнить результаты с ответами, полученными при решении задачи 3 (урок 27).

Решение.

Найдем дифференциальную функцию и по ней определим вид распределения. Плотность вероятности найдем по формуле $f(x) = F'(x)$, т. е.

Если $x \le 0$; то $F(x) = ...$; тогда $f(x) = F'(x) =$ ……

Если $0 < x \le 3$; то $F(x) =$……, тогда $f(x) =$ ……

Если $x > 3$, то $F(x) = ……$, тогда $f(x) =$ ……,

Запишем функцию плотности $f(x)=\begin{cases} ..... \end{cases}$

Построим график функции плотности.

На отрезке от 0 до 3 плотность вероятности не меняется, поэтому непрерывная случайная величина *X* имеет равномерный закон распределения на отрезке *[0; 3]:* её плотность вероятности постоянна на этом отрезке и равна нулю вне этого отрезка.

Воспользуемся свойствами этого распределения для вычисления характеристик случайной величины *X*.

Математическое ожидание равномерной случайной величины равно $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$ и равно медиане. Дисперсия равна $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

$M(X)=$…… $Me =$ ……,

$D(X)=$……

Ответ: M(X) = ……, Me = ……, D(X) = ……

Практическая работа № 10 «Центральная предельная теорема».

Дидактическая цель**.** Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

– функцию плотности нормального распределения НСВ

– смысл параметров μ и σ нормального распределения

– интегральную функцию распределения нормального распределения НСВ

Уметь:

– вычислять вероятности для нормального распределения НСВ

Вопросы к теме

1. Дайте определение нормального распределения.

2. Дать понятие нормальной кривой.

3. Записать параметры нормального распределения и объяснить их смысл.

4. Сформулировать правило "Трех сигм".

.....

.....

Задачи к практической работе

Задача 1.

Задана случайная величина X□□N(0□□2) . Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значение:

а) в интервале [-1, 2]; б) меньшее -1; в) большее 2;

г) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше чем на 1.

Дано: случайная величина X□□N(0□□2), □ = 0, □ = 2,

Найти: P (-1 □ X □ 2), P (X □ -1), P (X ≥ 2), $P\left(\left|X-0\right|\le 1\right)$

Решение

Вероятность того, что случайная величина *X □ N(□□□□)* принимает значение в интервале *(a, b)* равна

$$P(a\le X\le b)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{в-\mu}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$ где *Φ(x)* - функция распределения нормированного нормального распределения. Находится по таблицам приложения (Таблица 2).

Функция нечетная. Для *u > 5 Φ(u) =1*.

а) Дано: □ = 0, □ = 2, a = -1, b = 2.

Найти: P (-1 □ X □ 2)

Получим

$$P\left(-1\le X\le 2\right)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{2-0}{2}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right)=\frac{1}{2}\Phi\left(.....\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(.....\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\Phi(.....)+\frac{1}{2}\Phi(.....)=\frac{1}{2}\left(.....+.....\right)=.....$$

б) Дано: □ = 0, □ = 2, a = - □, b = -1.

Найти: P (X □ -1).

Имеем

$$P\left(X\le -1\right)=P\left(-\infty\prec X\le -1\right)=\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{-\infty-0}{2}\right)=$$

……

в) Дано: □ = 0, □ = 2, a = 2, b = □.
Найти: P (X ≥ 2).
Имеем

$$P\left(X \geq 2\right) = P\left(2 \leq X \prec \infty\right) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\infty - 0}{2}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

……
г) Дано: □ = 0, □ = 2, $\varepsilon = 1$.
Найти: $P\left(\left|X - 0\right| \leq 1\right)$
Вероятность того, что случайная величина *X* □ *N(*□□□□*)* отличается от своего среднего □ значения по абсолютной величине не больше чем на □ равна:

$$P\left(\left|\ X - \mu\ \right| \leq \varepsilon\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Имеем

$$P\left(\left|\ X - 0\ \right| \leq 1\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Задача 2

Задана случайная величина X □ N (-10 , 3) и точки -17, -13, -7, -1, 2 на числовой оси, разделяющие ее на шесть интервалов. Найти вероятности того, что случайная величина принимает значения в этих интервалах.

Дано: случайная величина X□□N(-10□□3), точки -17, -13, -7, -1, 2
Найти: P (a □ X □ b)
Решение

Найдем вероятности того, что случайная величина принимает свои значения в первом интервале.
Дано: □ = -10, □ = 3, a = - □, b = -17.
Найти: P (X □ -17)

$$P\left(X \leq -17\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

……
……
Найдем вероятности того, что случайная величина принимает свои значения во втором интервале.
Дано: □ = -10, □ = 3, a = - 17, b = -13.
Найти: P (-17 □ X □ -13).

$$P\left(-17 \prec X \leq -13\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

……
……
Учитывая, что конец одного интервала является началом следующего, результаты вычислений лучше оформить в виде таблицы.
Тогда в первом столбике запишем границы интервалов.

Заполним второй столбик таблицы

$$\frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{-\infty + 10}{3} = -\infty \quad \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{-17 + 10}{3} = \ldots\ldots\ldots \quad \frac{x_3 - \mu}{\sigma} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

……...
……...

Заполним третий столбик таблицы

$\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}\Phi(-\infty)=-0.5$; $\frac{1}{2}\Phi(-2.33)=-0.9802/2=$ ……..

$\frac{1}{2}\Phi(-1)=$……; $\frac{1}{2}\Phi(1)=$ ……

…….....……
……
……..

Заполним четвертый столбик таблицы

$P(-\infty\le X\le -17)=$ - 0.4901 – (- 0,5) = 0.00990

$P(-17\le X\le -13)$ = - 0.34135 – (- 0.4901) = 0.14875

$P(-13\le X\le -7)$ = ……..

…….....……
…….....……

x_i	$\frac{x_i-\mu}{\sigma}$	$\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)$	$P(x_i\le X\le x_{i+1})$
-□	-□	- 0.5	0.00990
-17	-2.33	- 0.4901	0.14875
-13	-1	- 0.34135	
-7			
-1			
2			
□			
		□	1

Интервалы охватывают всю числовую ось, так что сумма полученных вероятностей должна быть равна 1.

Практическая работа № 11 «Решение задач на операции над графами».

Дидактическая цель**.** Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

– определение понятия графа
– основные виды графов
–способы задания графов

Уметь

– определять степень вершин графов
- определять сумму степеней данного графа
- составлять простые цепи
- строить простые циклы

Вопросы к теме

1. Дать определение понятия графа.
2. Перечислите основные виды графов.

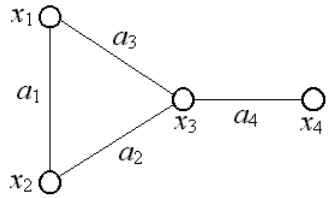
3. Перечислите способы задания графов.

4. Перечислите операции над графами.

Задачи к практической работе

Задача 1

Определите степени вершин графа:



Решение: степень вершины графа – это количество ребер, исходящих из этой вершины. $P(x_1) = 2$; $p(x_2) = 2$; $p(x_3) = 3$; $p(x_4) = 1$

Задача 2

Определить сумму степеней данного графа.

Решение: сумма степеней графа равна удвоенному числу ребер графа. Так как ребер в данном графе 4,то сумма степеней вершин равна 8.

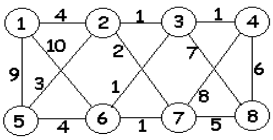
Задача 3

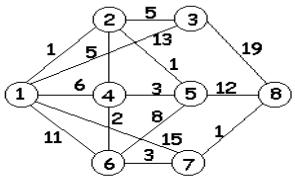
1. Дан граф

А) Запишите количество ребер и вершин графа;

В) Определить кратчайший путь из вершины 1 в вершину 8 для графа, представленного на рисунке;

С) Запишите номера вершин, имеющих одинаковую степень**:**

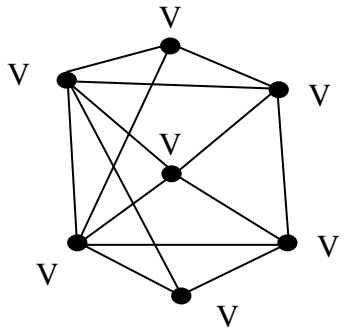




2. Граф задан диаграммой.

А) Составьте маршруты длины 5 из вершиныV_2 в вершину V_5. Составьте простую цепь, соединяющую эти вершины.

В) Постройте простой цикл, содержащий вершину V_4.



1. Сумма степеней вершин графа равна 8. Найдите число ребер.
2. Число ребер графа равно 12. Найти сумму степеней вершин графа.

Практическая работа № 12. «Решение задач на применение графов и сетей».

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

– методику нахождения кратчайшего пути в графе
– работу алгоритма Дейкстры

Уметь:

-Записывать матрицу смежности графа.

- записывать кратчайший путь из вершины в вершину

Вопросы к теме:

1) Дать определение понятия графа.

2)Перечислите основные виды графов.

3)Перечислите способы задания графов.

4)Перечислите операции над графами.

Задача 1

Для графа, заданного отношением на множестве, построить матрицу смежности, списки смежных вершин и нарисовать граф.

Пример

$V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $R = \{(1,2),(3,4),(1,4),(3,3),(3,7),(7,3),(8,4),(3,5),(5,7),(8,1)\}$

Решение

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0
8	1	0	0	1	0	0	0	0

1	2,4
2	
3	3,4,5,7
4	

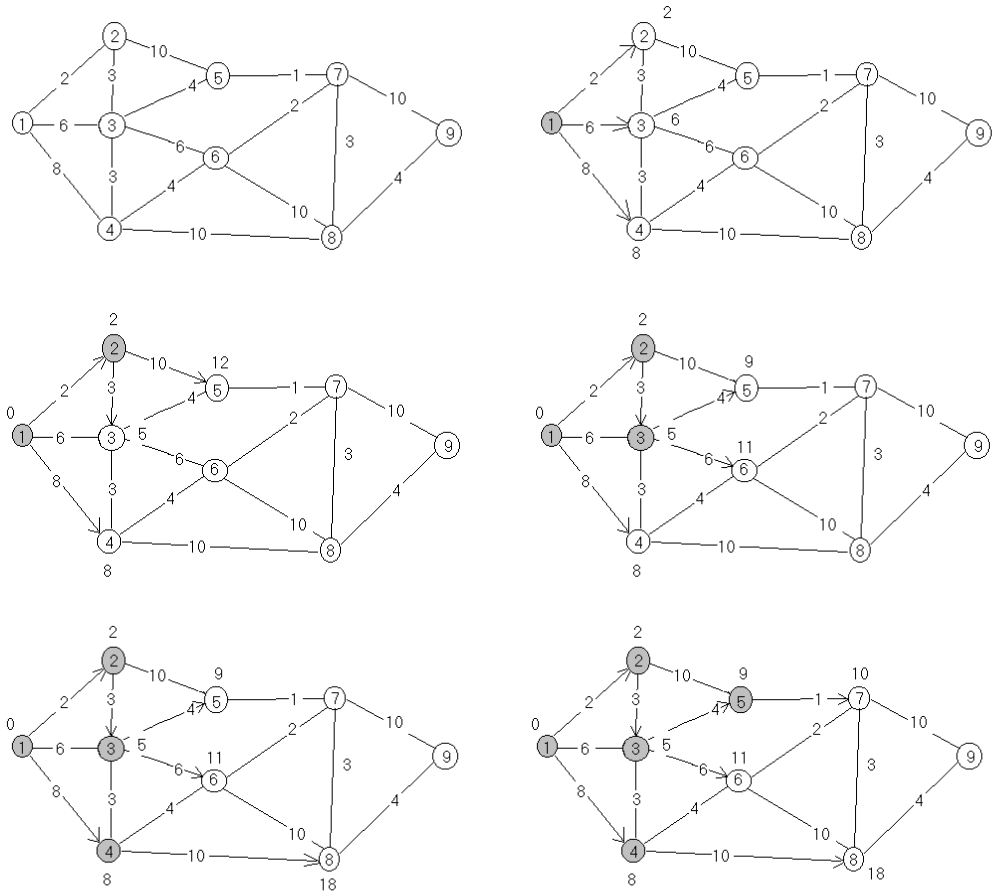
5	7
6	
7	3
8	1,4

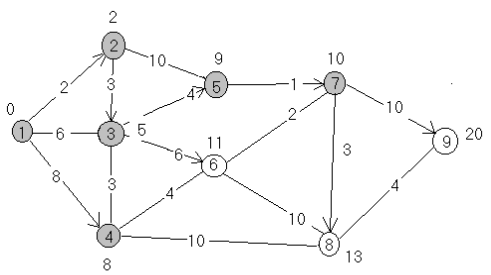
Задача 2.

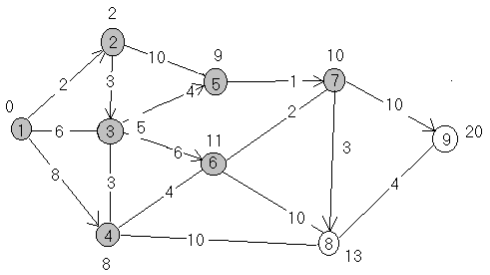
Найти кратчайший путь в графе, продемонстрировав работу алгоритма Дейкстры
Пример Задана матрица весов. Найти кратчайший путь от вершины 1 к 9

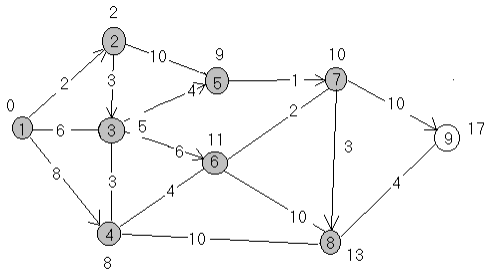
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	2	6	8					
2	2	0	3		10				
3	6	3	0	3	4	6			
4	8		3	0		4		10	
5		10	4		0		1		
6			6	4		0	2	10	
7					1	2	0	3	10
8				10		10	3	0	4
9							10	4	0

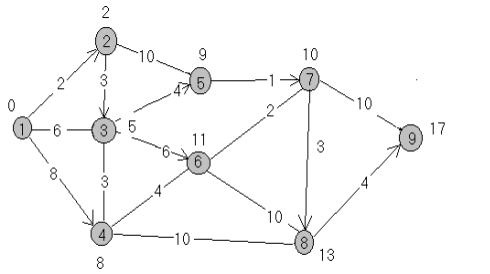
Решение





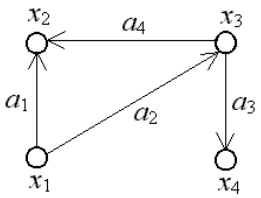






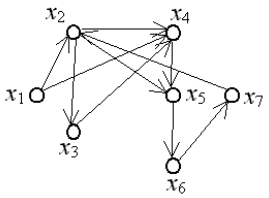
3)самостоятельное выполнение типового расчета (самопроверка по эталону решения):

1.Дан граф



Записать матрицу смежности графа.

2. Дан граф. Записать кратчайший путь из вершины 1 в вершину 6.



Практическая работа № 13 «Построение полигона и гистограммы».

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Иметь понятие:

– о сущности выборочного метода

Знать*:*

– понятие вариационного ряда;

– понятие полигона и гистограммы, методику их построения;

– числовые характеристики выборки и методику их расчета

Уметь:

– строить для данной выборки её графическую диаграмму;

– рассчитывать по заданной выборке её числовые характеристики

Вопросы к теме

1. Дайте определение генеральной совокупности. Приведите примеры.

……

……

2. Дайте определение выборочной совокупности. Приведите примеры.

……

3. Какая выборка называется представительной?

……

4. Что называется вариационным рядом?

……

5. Что такое вариант?

……

6. Что называется частостью?

……

Задачи к практической работе

Задача № 1

При обследовании 50 членов семей рабочих и служащих установлено следующее количество членов семьи:

5;3;2;1;4;6;3;7;9;1;3;2;5;6;8;2;5;2;3;6;8;3;4;4;5;6;5;4;7;5;6;4;8;7;4;5;
7;8;6;5;7;5;6;6;7;3;4;6;5;4.

1) Составьте вариационный ряд распределения частот.

2) Постройте полигон распределения частот.

3) Определите средний размер (среднее число членов) семьи.

4)Охарактеризуйте колеблемость размера семьи с помощью показателей вариации (дисперсии, среднего квадратического отклонения, коэффициента вариации).

Решение.

1) В данной задаче изучаемый признак является дискретно варьирующим, так как размер семей не может отличаться друг от друга менее чем на одного человека. Следовательно, необходимо построить дискретный вариационный ряд. Чтобы сделать это, необходимо подсчитать, сколько раз встречаются те или иные значения признака, и расположить их в порядке возрастания или убывания. Значения изучаемого признака - размер семьи - обозначим $x_{i,}$ а частоты - n_i.

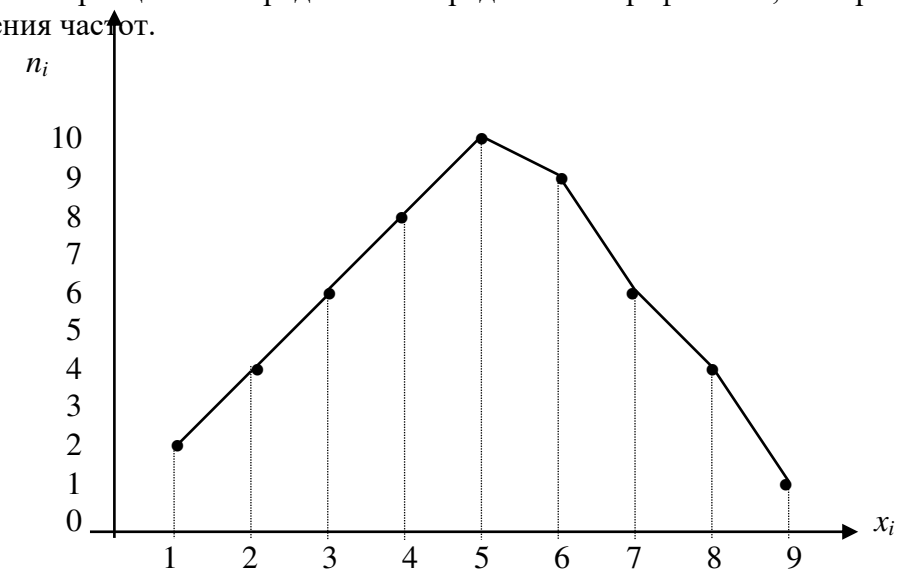
Произведем расчеты и запишем их результаты в таблицу.

x_i	*Подсчет частот вариант*	n_i
1	//	*2*
2	////	*4*
3	~~////~~ /	*6*
4	~~////~~ ///	*8*
5		
6		
7		
8		
9		
	Контроль: $n_i =$	*50*

Получим вариационный ряд распределения частот.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	4	6	8					

2) Дискретный вариационный ряд можно представить графически, построив полигон распределения частот.



3) Рассчитаем средний размер (среднее число членов) семьи. Вначале расчет средней арифметической произведем по первой формуле.

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i$, тогда $\bar{x} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 +}{2+4+6+} =$

= ……

Средний размер семьи равен …… чел.

4) Охарактеризуем колеблемость размера семьи.

С начала для расчета дисперсии размера семьи используем первую формулу

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot n_i - \left(\bar{x}\right)^2$$

$$\overline{S}^2 = \frac{(1-4{,}94)^2 \cdot 2 + (2-4{,}94)^2 \cdot 4 + (3-4{,}94)^2 \cdot 6}{2+4+6+8+10+9+6+4+1}$$

…….....…

Или

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{50}(1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 9 \cdot 6 + 16 \cdot 8 + \qquad\qquad) - 4{,}94^2 =$$

…….....…

Дисперсия размера семьи равна …….. чел^2

Для того чтобы рациональнее выполнить вычисления по второй формуле составим таблицу.

В первом столбике перечислим значения вариант. Найдем *k* - шаг таблицы, т. е. интервал между соседними вариантами и *c* - произвольное число (но для простоты следует выбрать вариант, имеющий максимальную частоту). Исходя из условия, получим *k = 1, c = 5,* тогда вторая формула примет вид

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - 5}{1} \cdot n_i}{n} \cdot 1 + 5, \text{ и } \overline{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - 5}{1}\right)^2 \cdot n_i}{n} \cdot 1^2 - (\overline{x} - 5)^2.$$

x_i	n_i	$\frac{x_i - c}{k}$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right) \cdot n_i$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 \cdot n_i$
1	***2***	***-4***	***-8***	***16***	***32***
2	***4***	***-3***	***-12***	***9***	***36***
3	***6***	***-2***			
4	***8***				
5					
6					
7					
8					
9					
□	***50***	***----***	***-3***	***----***	***185***

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - 5}{1} \cdot n_i}{n} \cdot 1 + 5 = \frac{-3}{50} \cdot 1 + 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ - ответы совпадают.

$$\overline{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - 5}{1}\right)^2 \cdot n_i}{n} \cdot 1^2 - (\overline{x} - 5)^2 = \frac{185}{50} \cdot 1^2 - (4{,}94 - 5)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ответы совпадают.

Найдем среднее квадратическое отклонение размера семьи

$$\overline{S} = \sqrt{\qquad\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Среднее квадратическое отклонение размера семьи - …… чел.

Найдем коэффициент вариации размера семьи по формуле

$$V(X) = \frac{1{,}9226}{4{,}94} \cdot 100\,\% = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Практическая работа № 14 «Точечные и интервальные оценки параметров распределения».

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

– точечные оценки генеральной средней, генеральной дисперсии и генерального отклонения

– точечную оценку вероятности события

Уметь:

– рассчитывать, по заданной выборке, точечную оценку генеральной средней, генеральной дисперсии и генерального среднеквадратического отклонения;

– рассчитывать доверительный интервал с заданной надежностью для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

Вопросы к теме

1. Сформулируйте теорему о состоятельности выборочного среднего.

…….....…

…….....…

2. Сформулируйте теорему о несмещенности оценки.

…….....…

…….....…

3. Является ли выборочное среднее несмещенной эффективной оценкой математического ожидания?

…….....…

4. Дайте точечные оценки генеральной дисперсии: состоятельность, несмещенность, эффективность.

…….....…

…….....…

Задачи к практической работе

Задача № 1

По выборке D_0: - 35; - 32; - 26; - 35; - 30; - 17

вычислить несмещенные оценки среднего значения, дисперсии и стандартного отклонения генеральной совокупности: $\overline{x}$, S^2, S.

Дано: выборка D_0: -35; -32; -26; -35; -30; -17

Найти: $\overline{x}$, S^2, S

Решение:

Несмещенной оценкой среднего значения генеральной совокупности является среднее арифметическое выборки $\overline{x}$.

Объём выборки *n* = ... Объём выборки мал, поэтому несмещенную оценку среднего значения $\overline{x}$ вычислим по формуле: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

При малом объёме выборки оценить дисперсию генеральной совокупности можно с помощью исправленной дисперсии.

Несмещенную оценку дисперсии S^2 вычислим по формуле $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$; а стандартное отклонение S по формуле $S = \sqrt{S^2}$.

Вычисление сумм оформляем в таблице.

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
- 35	*- 5,8*	*33,64*
- 32	*- 2,8*	*7,84*
- 26		
- 35		
- 30		
- 17		
□□□□□□□□□□	--------	□□□□□□□□□□□□

Полученное значение суммы □□□□□□□□□□ подставим в формулу $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, получим $\overline{x} = \frac{-175}{6} =$ ……

Значение суммы □□□□□□□□□□ подставим в формулу $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$;

Внимание! *n = 6, n – 1 = 5,* тогда $S^2 = 1/5 \cdot 234{,}84 =$ ……

стандартное отклонение S вычислим по формуле $S = \sqrt{S^2}$, *S* = …….

Ответ: $\overline{x}$ = …….., S^2 = ……, S = …….

Задача 2

Найти доверительный интервал для оценки с надежностью □ = 0.99 неизвестного математического ожидания а нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение □□□□4,□□ выборочная средняя $\overline{x}_B$ = 15,6 и объем выборки n = 81.

Дано: □ = 0.99 - надежность

□□□□4,□ - генеральное среднее квадратическое отклонение

$\overline{x}_B$ = 15,6 - выборочная средняя, n = 81 - объем выборки

Найти: доверительный интервал

Решение:

Доверительный интервал найдем по формуле: $\overline{x}_B - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \langle a \langle \overline{x}_B + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Известно, что случайная величина X подчинена ..... закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 4{,}5$, тогда вероятность γ того, что отклонение найденной выборочной средней $\bar{x}_в = 15{,}6$ от неизвестного математического ожидания a по абсолютной величине не превосходит заданного числа $\delta > 0$ (бесконечно малого), определяется по формуле

$$\gamma = P(|\bar{x}_в - a| < \delta) = \Phi(\delta / \sigma_1),$$

то есть $\gamma = \Phi(\delta / \sigma_1)$, или $\gamma = \Phi(t)$, и необходимо найти t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$.

По условию ищем доверительный интервал с надёжностью □ = ……, тогда $\Phi(t)$ = …….. По таблице приложения (таблица 2) находим
t = ... Тогда среднее квадратическое отклонение для $\bar{x}_в$ определяем по формуле
$\sigma_1 = \sigma / \sqrt{n}$

$\sigma_1 = \sigma / \sqrt{n}$ =……,так как $\delta / \sigma_1 = t$, то $\delta = t \cdot \sigma_1$ = …….·…… = ….
В результате получаем доверительные границы
$\bar{x}_в - \delta$ = ……,
$\bar{x}_в + \delta$ = …….
Искомый доверительный интервал
$I_{||}$ = [$\bar{x}_B$ – □; $\bar{x}_B$ + □], $I_{||}$ = […….; ……].

Ответ: …….. < a < …… .

Практическая работа № 15 «Метод произведений для вычисления выборочной средней и дисперсии».

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы. □

Знать:
– метод произведений для вычисления выборочной средней и дисперсии
– выборочную среднюю и дисперсию

Уметь:
– рассчитывать, по заданной выборке, выборочную среднюю и дисперсию

-

Задача
Дано:

статистический ряд распределения значений измеряемой случайной величины:

варианты:10,210,410,610,811,011,211,411,611,812,0

частоты: 2 3 8 13 25 20 12 10 6 1

Найти:
выборочную среднюю и дисперсию
Решение
1). в первый столбец таблицы записывают выборочные (первоначальные) варианты, располагая их в возрастающем порядке;

2). во второй столбец записывают частоты вариант; складывают все частоты и их сумму (объем выборки n) помещают в нижнюю клетку столбца;

3). в третий столбец записывают условные варианты $u_i = \frac{x_i - C}{h}$, причем в качестве ложного нуля C выбирают варианту с наибольшей частотой и полагают h равным разности между любыми двумя соседними вариантами;

4). умножают частоты на условные варианты и записывают их произведения $n_i u_i$ в четвертый столбец;

5). сложив все полученные числа, их сумму $\sum n_i u_i$ помещают в нижнюю клетку столбца;

Расчеты осуществляем в таблице:

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
10,2	2	-4	-8	32	18
10,4	3	-3	-9	27	12
10,6	8	-2	-16	32	8
10,8	13	-1	-13	13	0
11,0	25	0	$A_1 = -46$		25
11,2	20	1	20	20	80
11,4	12	2	24	48	108
11,6	10	3	30	90	160
11,8	6	4	24	96	150
12,0	1	5	5	25	36
			$A_2 = 103$		
	$n = 100$		$\sum n_i u_i = 57$	$\sum n_i u_i^2 = 383$	$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597$

Контроль вычислений:

$\sum n_i u_i^2 + 2\sum n_i u_i + n = 383 + 2 \cdot 57 + 100 = 597.$

$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 597.$

Таким образом, вычисления произведены верно.

Далее, вычислим условные моменты первого и второго порядков:

$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0{,}57; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{383}{100} = 3{,}83.$

Находим шаг: $h = 10{,}4 - 10{,}2 = 0{,}2.$

И, наконец, вычислим искомые величины:

$\bar{x}_в = M_1^* \cdot h + C = 0{,}57 \cdot 0{,}2 + 11{,}0 = 11{,}1;$

$D_в = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right] \cdot h^2 = \left[3{,}83 - (0{,}57)^2\right] \cdot (0{,}2)^2 \approx 0{,}14.$

$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0{,}57; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{383}{100} = 3{,}83.$

Практическая работа № 16 «Проверка гипотезы о законе распределения на основе согласия Пирсона».

Вопросы к теме

1. чем отличаются непараметрические методы проверки гипотез от параметрических…….....…
…….....…

2. К какому из методов проверки гипотез относится критерий Пирсона?
…….....…

3. Что называется теоретической частотой?
…….....…

4.Опишите алгоритм проверки гипотезы по критерию $\chi 2$.
…….....…
…….....…

5.Как определить число связей и число степеней свободы?
…….....…
…….....…

6.Что такое доверительный интервал и как он определяется?
…….....…
…….....…

7.Какие данные позволяют сделать вывод об истинности или ложности гипотезы при расчетах критерия Пирсона?

Основные вопросы темы:
- Статистическая гипотеза
- Этапы проверки гипотез
- Критическая область
- Методы оценки гипотез

Теоретический материал

1. Понятие статистической гипотезы

Под статистическими гипотезами подразумеваются такие гипотезы, которые относятся или к виду случайной величины, или к отдельным параметрам распределения случайной величины.

К статистическим гипотезам можно отнести высказывания типа:
«случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения»;
«генеральные средние двух исследуемых совокупностей равны между собой».

Выдвинутую гипотезу называют нулевой и обозначают H_0. По отношению к высказанной (основной) нулевой гипотезе всегда можно сформулировать альтернативную или конкурирующую гипотезу, противоречащую ей. Альтернативная гипотеза обозначается обычно через H_1

Проверкой статистических гипотез называется сопоставление выдвинутой гипотезы H_0 с альтернативной при использовании статистических критериев и данных выборочных наблюдений.

Если гипотеза H_0 сводится к утверждению, что значение некоторого неизвестного параметра распределения случайной величины равно заданной величине, то гипотеза называется простой.

2. Критическая область

Все возможное множество выборок объема n можно разделить на два непересекающихся подмножества (обозначим их через O и W), таких, что проверяемая гипотеза H_0 должна быть отвергнута, если наблюдаемая выборка попадет в подмножество W, и принята, если выборка принадлежит подмножеству O.

Подмножество W выборок таких, что проверяемая гипотеза H_0 должна быть отвергнута, называют критической областью; O выборок таких, что проверяемая гипотеза H_0 должна быть принята,— областью допустимых значений.

3. Методы оценки статистических гипотез

Проверка статистических гипотез осуществляется с помощью выбранного статистического критерия.

Статистическим критерием называют правило, которое позволяет оценить меру расхождения результатов, полученных при оценке выборочного наблюдения и основной выдвинутой гипотезы H_0

Статистический критерий подбирается в каждом отдельном случае таким образом, чтобы он соответствовал принципу отношения правдоподобия. Критерий K с известной функцией плотности $f(k)$ позволяет при заданном уровне значимости определить критическую точку $K_{кр}$ распределения $f(k)$, которая разделяет область значений критерия на две части: область допустимых значений, в которой результаты выборочного исследования выглядят более правдоподобно, и критическую область, в которой результаты выборочного наблюдения менее правдоподобны в отношении гипотезы H_0. Обычно $K_{кр}$ определяется по таблице соответствующего распределения.
Значение критерия на основе выборочного наблюдения определяется по специальным правилам и называется наблюдаемым значением критерия $K_{набл}$.

Задача № 1

На уровне значимости a = 0,025 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

$m_{(эмп.)i}$	6	11	21	26	15	4
$m_{(теор.)i}$	7	15	29	19	9	4

Дано: a = 0,025, эмпирические и теоретические частоты,
H_0: случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения
Проверить: H_0

Решение:

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.
H_0: X □ N(□□□□^{2}) — случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с параметрами □ и□□□ ^{2}.

H_1: Случайная величина X не подчиняется нормальному закону распределения с параметрами □ и□□□ ^{2}.

В качестве критерия для проверки нулевой гипотезы используем критерий Пирсона χ^2.

Найдем наблюдаемое значение ($\chi^2_{набл.}$):

$$\chi^2_{набл.} = \frac{(6-7)^2}{7} + \frac{(11-15)^2}{15} + \frac{(21-29)^2}{29} + \frac{(26-19)^2}{19} +$$

$$+ \frac{(15-9)^2}{9} + \frac{(4-4)^2}{4} \approx 9{,}995$$

Найдем критическое значение критерия ($\chi^2_{кр.}$) по таблице распределения χ^2. (приложение 3) по уровню значимости α и числу степеней свободы k.

По условию α = 0,025; число степеней свободы найдем по формуле:

$k = n - l - 1$, где k – число степеней свободы;

n – число групп выборки;

l – число неизвестных параметров предполагаемой модели, оцениваемых по данным выборки.

По условию задачи число групп выборки (n) равно 6, а число неизвестных параметров нормального распределения (l) равно 2.

Отсюда $k = 6 - 2 - 1 = 3$.

Используя приложение 3, найдем $\chi^2_{кр.}$по уровню значимости α = 0,025 и числу степеней свободы k = 3:

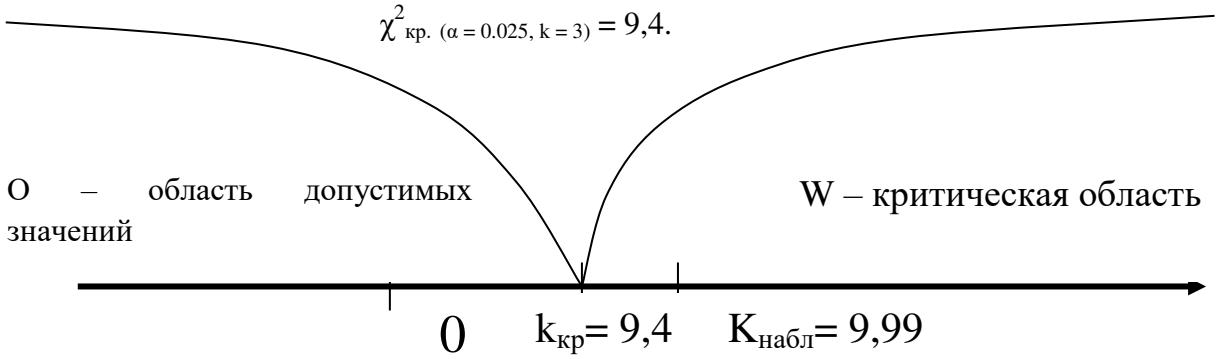


Иллюстрация к задаче № 1

$\chi^2_{набл.} > \chi^2_{кр.}$, следовательно, на данном уровне значимости нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей, расхождения эмпирических и теоретических частот значимые. Данные наблюдений не согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Ответ: на уровне значимости α = 0,025 данные наблюдений не согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Задача № 2

Партия изделий принимается в том случае, если вероятность того, что изделие окажется соответствующим стандарту, составляет не менее 0,97. Среди случайно отобранных 200 изделий проверяемой партии оказалось 193 соответствующих стандарту. Можно ли на уровне значимости α = 0,02 принять партию?

Дано: $\alpha = 0{,}02$, $p_0 = 0.97$, т =200, n = 193

H_0: партию изделий можно принять

Проверить: H_0

Решение:

Для решения данной задачи необходимо проверить гипотезу о том, что неизвестная генеральная доля точно равна определенному числу.

Сформулируем нулевую и конкурирующую гипотезы согласно условию задачи.

H_0: $p = p_0 = 0{,}97$ — неизвестная генеральная доля p равна p_0 (применительно к условию данной задачи — вероятность того, что деталь из проверяемой партии окажется соответствующей стандарту, равна 0,97; то есть партию изделий можно принять).

H_1: $p < 0{,}97$ — неизвестная вероятность p меньше гипотетической вероятности p_0 (применительно к условию данной задачи вероятность того, что деталь из проверяемой партии окажется соответствующей стандарту, меньше 0,97; то есть партию изделий нельзя принять).

Так как конкурирующая гипотеза левосторонняя, то и критическая область левосторонняя.

В качестве критерия для сравнения наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события используется случайная величина U.

Ее наблюдаемое значение ($u_{набл}$) рассчитывается по формуле:

$$u_{набл.} = \frac{m/n - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0}} \cdot \sqrt{n}$$

где m/n – относительная частота (частость) появления события;

p_0 – гипотетическая вероятность появления события;

q_0 – гипотетическая вероятность непоявления события;

n – объем выборки.

По условию: $m = 193$; $n = 200$; $p_0 = 0{,}97$; $q_0 = 1 - p_0 = 0{,}03$; $\alpha = 0{,}02$.

Найдем наблюдаемое значение ($u_{набл}$):

$$u_{набл.} = \frac{193/200 - 0{,}97}{\sqrt{0{,}97 \cdot 0{,}03}} \sqrt{200} = -0{,}2771$$

Так как конкурирующая гипотеза левосторонняя, то критическое значение ($u_{кр}$) следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства: $\Phi_0(u_{кр}) = 1 - 2\alpha$

По условию $\alpha = 0{,}02$. Отсюда: $\Phi_0(u_{кр}) = 1 - 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}96$

По таблице функции Лапласа (приложение 2) найдем при каком $u_{кр}$

$\Phi_0(u_{кр}) = 0{,}96$: $\Phi_0(2{,}05) = 0{,}96$

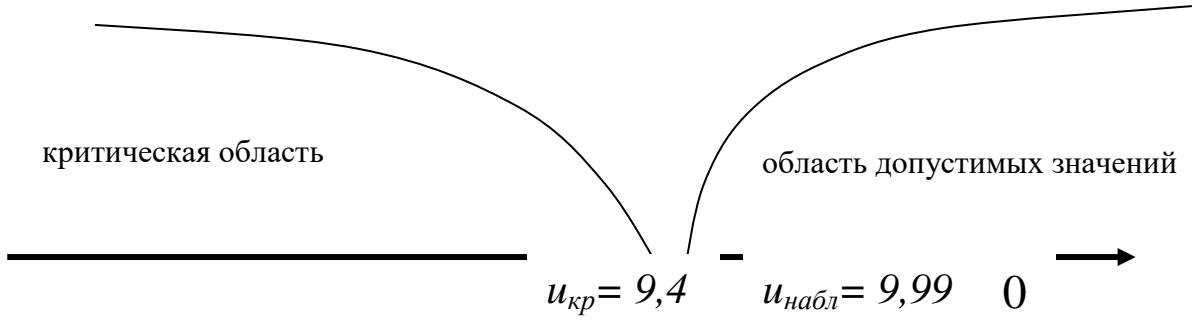
Учитывая, что конкурирующая гипотеза левосторонняя, критическому значению необходимо присвоить знак «минус».

Следовательно: $u_{кр} = -2{,}05$.

Заметим, что при правосторонней конкурирующей гипотезе H_1: $p > 0{,}97$ $u_{кр}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(u_{кр}) = 1 - 2\alpha$

При двусторонней конкурирующей гипотезе H_1: $p \neq 0{,}97$ $u_{кр}$ следует находить по таблице функции Лапласа (приложение 2) из равенства $\Phi_0(u_{кр}) = 1 - \alpha$

$u_{набл} > u_{кр}$, следовательно, на данном уровне значимости нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. По имеющимся данным на уровне значимости α = 0,02 нельзя отклонить гипотезу о том, что вероятность того, что изделие окажется соответствующим стандарту, составляет 0,97. Следовательно, партию изделий принять можно.



Наблюдаемое значение критерия попадает в область допустимых значений, следовательно, нет оснований отклонить нулевую гипотезу.

Ответ: на уровне значимости α = 0,02 партию изделий принять можно.

Практическая работа № 17 «Моделирование случайных величин»

Дидактическая цель. Применение полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Иметь понятие:

– о сущности метода Монте-Карло.

Знать:

– правило разыгрывания дискретной случайной величины

Уметь:

– разыгрывать возможные значения дискретной случайной величины, зная закон ее распределения

Вопросы к теме

1. В чем состоит сущность метода Монте- Карло?

…….....

2. Что значит разыграть случайную величину?….

…….....…

3. Сформулируйте правило разыгрывания дискретной случайной величины.

…….....

Задачи к практической работе Задача. Разыграть шесть возможных значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы

x	***2***	***10***	***18***
p	***0,22***	***0,17***	***0,61***

Решение

1) Разобьем интервал ... оси Ох точками с координатами

... 0,22+0,17=0,39 на три частичных интервала:

Δ_1=(0; 0,22), Δ_2=(...; 0,39), Δ_3 = (0,39; 1)

2) Выпишем из таблицы приложения 9 шесть случайных чисел

например 0,32; 0,17; 0,90; 0,05; 0,97; 0,87

3). Случайное число r_1 = 0,32 принадлежит частичному интервалу

Δ_2, поэтому разыгрываемая … … … … … … … … … … … …

приняла возможное значение x_2 = 10; случайное число r_2 = 0,17

принадлежит частичному ....., поэтому разыгрываемая

величина приняла возможное значение x_1 = 2

Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, разыгранные возможные значения таковы: 10; 2; 18; 2; 18,; 18.

Дифференцированный зачет «Теория вероятностей и математическая статистика»

Дидактическая цель. Контроль полученных знаний, умений и навыков в процессе выполнении самостоятельной вычислительной работы.

Знать:

– основные понятия теории вероятностей

Уметь:

– решать задачи на вычисление вероятностей событий
– вычислять характеристики случайных величин

Обязательный минимум по теории вероятностей
по теме «Случайное событие и случайные величины»

Вопросы к теме

1. Случайным событием называется
…….....…
2. Испытанием или опытом называется
…….....…
3. Частотой события называется
…….....…
4. Вероятностью события *P(A)* события *A* называется
…….....…
5. Случайной величиной называется величина, которая
…….....…
6. Дискретной величиной называют случайную величину
…….....…
7. Непрерывной величиной называется случайная величина
…….....…
8. Законом распределения случайной величины называется соответствие
…….....…
9. Математическим ожиданием *M(X)* называется

…….....• • • • •
10. Дисперсией *D(X)* называется
…….....…

Задачи

Задача № 1

Выпущено 100 билетов лотереи. Из них 10 билетов с выигрышем по 1 рублю, 2 билета с выигрышем по 5 рублей и 1 билет с выигрышем в 10 рублей. Остальные билеты невыигрышные. Найти закон распределения выигрыша, выпавшего на один билет в данной лотерее?

Дано: .....
.....
.....
Найти: закон распределения X
Решение:
.....
.....

.....
.....
Ответ:

x_i				
p_i				

Задача № 2
Дан закон распределения случайной величины X:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Найти закон распределения случайной величины $Z = X^2$?
Дано: .....
.....
Найти: закон распределения Z
Решение:
.....
.....
Ответ:

x_i			
p_i			

Задача № 3
Из ящика, содержащего 12 стандартных деталей и 4 бракованных, наудачу извлекают три детали без возвращения. Найти вероятность того, что все детали стандартные.
Дано: .....
.....
.....
Найти: ……..
Решение:
.....
.....
.....
Ответ: ……
Задача № 4
В урне 15 красных и 5 синих шаров. Наудачу вынимают два шара. Найдите вероятность того, что оба шара одноцветные.
Дано: .....
.....
.....
Найти: ……..
Решение:
.....
.....
.....
Ответ: ……
Задача № 5
Два стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Вероятности попадания для них соответственно равны 0,7 и 0,6. Найти вероятность того, что оба попадут в цель.
Дано: .....
.....
.....
Найти: ……..
Решение:

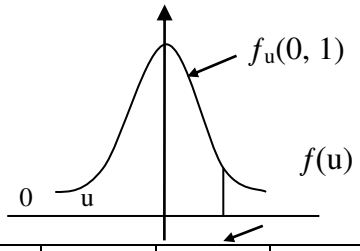
.....
.....
.....
Ответ: ……
Задача № 6
Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента при включении прибора равна 0,07, второго – 0,06. Найти вероятность того, что при включении прибора выйдет из строя только один элемент.
Дано: .....
.....
.....
Найти: ……..
Решение:
.....
.....
.....
Ответ: ……
Задача № 7
Число очков, выбиваемых стрелком при одном выстреле, имеет закон распределения:

x_i	8	9	10
p_i	0,3	0,5	0,2

Найти среднее число очков выбиваемых стрелком при одном выстреле.
Дано: .....
Найти: ……..
Решение:
.....
.....
Ответ: ……
Задача № 7
Даны две случайные величины: X – число бракованных изделий, изготавливаемых 1^{м} рабочим за смену, Y – число бракованных изделий изготавливаемых 2^{м} рабочим за смену. M(X) = 0,7, M(Y) = 0,65. Какой из рабочих работает лучше? Какое среднее число бракованных изделий изготавливают оба рабочих за смену?
Дано: .....
.....
.....
Найти: ……..
Решение:
.....
.....
.....
Ответ: ……
Задача № 8
Известно, что случайная величина X и Y независимы; DX = 2; DY = 5; Найти D(3X+Y).
Дано: .....
.....
Найти: ……..
Решение:
.....
.....
Ответ: ……

Таблица 1

Значение функции плотности стандартной нормальной величины *U = N(0, 1):*



Кривая Гаусса

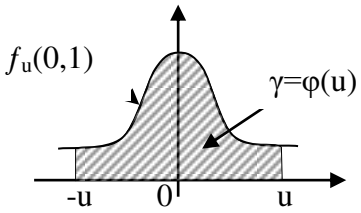
$$f_v(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3188	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2922
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2

Значение функции Лапласа $\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-t^2/2} dt$

или значение вероятности $\gamma = P(|N(0,1)<u|)$



	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,000	0080	0160	0238	0319	0399	0478	0558	0638	0717
0,1	079 7	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5887	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6679	6729	6778
1,0	6827	6875	6923	6970	7017	7063	7109	7154	7199	7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9189	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	8488	9500	9512	9523	9534
2,0	9545	9556	9566	9576	9586	9596	9606	9616	9625	9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872

Список использованной литературы

1. Основная литература:
Лисичкин В. Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие / В Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. – 7 -е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – 464с.: ил. –(Учебники для вузов. Специальная литература). – Текст: непосредственный. ISBN 978-5-8114-4906-4 ЭБС «ЛАНЬ» договор № 169 29.12. 2021г до 31.12.2022г.

2.Дополнительная литература:
Коган Е.А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 250 с. — (Среднее профессиональное образование).ЭБС znanium.com Договор № 5669 от 10.01.2022г